

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Institut dopravy

Optimalizace letového řádu charterového dopravce

Timetable Optimization for Charter Air Transport Company

Student:

Bc. Vojtěch Graf

Vedoucí diplomové práce:

Ing. Dušan Teichmann, Ph.D.

Ostrava 2014

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Vojtěch Graf**
Studijní program: N2301 Strojní inženýrství
Studijní obor: 2301T003 Dopravní technika a technologie
Specializace: 40 Letecká doprava
Téma: **Optimalizace letového řádu charterového dopravce**
Timetable Optimization for Charter Air Transport Company

Zásady pro vypracování:

Úvod

Obecný popis procesu sestavy letového řádu charterového dopravce

Teoretická východiska řešení - výběr vhodné metody pro řešení

Analýza zdrojů vstupních dat

Návrh matematického modelu řešené úlohy

Výpočetní experimenty s navrženým modelem

Zhodnocení využitelnosti navrženého modelu pro potřeby letecké praxe

Závěr

Seznam doporučené odborné literatury:

Černý, J.; Kluvánek, P.. Základy matematickej teorie dopravy. Bratislava: VEDA, 1990. ISBN 80-224-0099-9

Janáček, J.. Optimalizace na dopravních sítích. Žilina: ŽU v Žilině, 2003. 248 s. ISBN 80-8070-031-1

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Dušan Teichmann, Ph.D.**

Datum zadání: 13.12.2013

Datum odevzdání: 19.05.2014



doc. Ing. Aleš Slíva, Ph.D.
vedoucí katedry



doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci, včetně příloh, vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě 8. 5. 2014

Handwritten signature in cursive script, reading "Václav Graf".

Podpis studenta

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě 8. 5. 2014



Podpis studenta

Jméno a příjmení autora práce

Bc. Vojtěch Graf

Adresa trvalého pobytu autora práce

Dolní 306,

Frenštát pod Radhoštěm 744 01

ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE

GRAF, V. *Optimalizace letového řádu charterového dopravce: diplomová práce*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Institut dopravy, 2014, 68 s., Vedoucí práce: Teichmann, D.

Cílem předložené diplomové práce je vytvořit alternativní systém pro podporu rozhodování při tvorbě leteckého řádu letecké charterové společnosti na bázi lineárního programování.

Úvod práce bude věnován charakteristice současného procesu tvorby letového řádu a popisu současných způsobů řešení dané problematiky.

Další část této práce se zaměří na analýzu vstupních dat a podkladů potřebných pro provedení optimalizačního výpočtu. Následně budou vytvořeny matematické modely v podobě obecných modelů. Navržené modely budou transformovány do optimalizačního software Xpress-IVE, kde bude ověřena jejich funkčnost.

V závěru práce budou prezentovány výsledky testování vytvořených matematických modelů a budou zhodnoceny dosažené cíle.

ANNOTATION OF DIPLOMA THESIS

GRAF, V. *Timetable Optimizatin for Charter Air Transport Company: Diploma Thesis*. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Institute of Transport, 2014, 68 p., Thesis head: Teichmann, D.

The aim of diploma thesis is to create alternative system for create of timetable for charter air transport company with linear programing.

The introduction of the paper is dedicated to characteristic of the current process making of timetable and describe currents methods of solution for this problem.

In next part of this thesis will be analysis of input data and documents, which will be needed for optimization calculation. Then will be created mathematical models like general models. These models will be transformed to optimization software Xpress-IVE. There it will be tested.

The results of testing will be presented in the end of this thesis and aims will be evaluated.

Seznam zkratek a použitých symbolů

c_0	cena paliva na domovském letišti ($pj \cdot l^{-1}$)
c_i	cena paliva potřebného pro spoj $i \in I$ ($pj \cdot l^{-1}$)
c_j	cena paliva v cílové destinaci $j \in I$ ($pj \cdot l^{-1}$)
CD	obsluhovaná cílová destinace
dz_i	začátek dne pro spoj letící do cílové destinace $i \in I$ (kap. 4.2), začátek období, ve kterém má být spoj $i \in I$ uskutečněn (kap. 4.3) (min)
dk_i	konec dne pro spoj letící do cílové destinace $i \in I$ (kap. 4.2), konec období, ve kterém má být spoj $j \in I$ uskutečněn (kap. 4.3) (min)
f_j	fixní náklady nutné pro použití každého letadla pro obsluhu naplánované množiny spojů (pj)
h_0	náklady na handling na domovském letišti (pj)
h_i	náklady na handling před absolvováním spoje $i \in I$ (pj)
I	množina cílových destinací (kap. 4.2), množina spojů (kap. 4.3)
min	minuta nebo označení typu extrému v účelové funkci modelu
$n_{i,j}$	náklady na přesun letadla po obsluze spoje $i \in I$ k obsluze spoje $j \in I$ (pj)
NM	nástupní místo
pj	peněžní jednotka
p_i	náklady na přeletové poplatky spoje $i \in I$ (pj)
p_j^1	poplatky při letu do cílové destinace $j \in I$ (pj)
p_j^2	poplatky při letu z cílové destinace $j \in I$ na domovské letiště (pj)
R^+	množina nezáporných čísel
s	spotřeba paliva ($l \cdot min^{-1}$)
T	prohibitivní konstanta
t_j^0	doba strávená na domovském letišti před letem do cílové destinace $j \in I$ (min)

t_i^1	čas odletu do cílové destinace $i \in I$ (kap. 4.2), čas odletu spoje $i \in I$ (kap. 4.3) (<i>min</i>)
t_i^2	doba letu do cílové destinace $i \in I$ (kap. 4.2), doba letu spoje $i \in I$ (kap. 4.3) (<i>min</i>)
t_i^3	doba strávená v cílové destinaci $i \in I$ (kap. 4.2), doba strávená na letišti po absolvování spoje $i \in I$ (kap. 4.3) (<i>min</i>)
t_i^4	doba letu z cílové destinace $i \in I$ zpět na domovské letiště (<i>min</i>)
t^5	časová rezerva – odbavení a přesun cestujících do místa pobytu, tzv. resortu (<i>min</i>)
W	systém obsluhy nástupních míst W
$x_{i,j}$	proměnná modelující návaznost letů do destinací (letadlo se po obsluze destinace $i \in I$ přesune k obsluze destinace $j \in I$) (kap. 4.2) nebo proměnná modelující návaznost spojů (přesun po obsluze spoje $i \in I$ k obsluze spoje $j \in I$ (kap. 4.3).

Obsah

1	Úvod.....	7
2	Podpůrné metody pro organizaci činností souvisejících s tvorbou letových řádů a rámcový postup vlastní tvorby letového řádu	8
2.1	Síťový graf.....	8
2.2	Ganttův diagram	9
2.3	Matematické modelování.....	10
2.4	Charakteristika procesu tvorby letového řádu letecké charterové společnosti	10
2.4.1	Další faktory ovlivňující tvorbu letového řádu	11
3	Základní rámec potřebný pro matematické modelování problému.....	14
3.1	Základní úvahy související s procesem optimalizace	14
3.2	Úvod k matematickému programování.....	14
3.3	Tvorba lineárních matematických modelů	15
4	Návrh matematických modelů	18
4.1	Společné vlastnosti modelů	18
4.2	Model pro tvorbu letového řádu letecké charterové společnosti – varianta I....	20
4.2.1	Formulace problému.....	21
4.2.2	Rekapitulace použitých zkratk a popis jejich významu v modelu.....	22
4.2.3	Matematický model úlohy	23
4.3	Model pro tvorbu letového řádu letecké charterové společnosti – varianta II...	26
4.3.1	Formulace problému.....	27
4.3.2	Popis použitých zkratk a označení.....	28
4.3.3	Model.....	29
5	Transformace matematických modelů do jazyku MOSEL.....	31
5.1	Optimalizační software Xpress-IVE	31

5.2	Transformace lineárního modelu do jazyku MOSEL	33
6	Výpočetní experimenty	36
6.1	Test – varianta I	36
6.1.1	Zápis v programu Xpress-IVE.....	38
6.2	Test – varianta I	40
6.2.1	Zápis v programu Xpress-IVE.....	43
6.3	Testování závislosti hodnoty prohibitivní konstanty T na hodnotě výpočetního času ve variantě II	45
7	Vyhodnocení získaných řešení.....	55
7.1	Interpretace výsledků testu varianty I.....	55
7.2	Interpretace výsledků testu varianty II.....	57
8	Závěr	61
	Použitá literatura	64
	Seznam obrázků	65
	Seznam tabulek	67

1 Úvod

První zmínky o rozvoji civilního letectví lze zaznamenat zejména v období mezi oběma světovými válkami. Začaly vznikat první letecké společnosti, které přepravovaly nejdříve poštu později i první cestující. Postupně se ukázalo, že z hlediska rozšíření nabídky na trhu není úplně vhodné provozovat lety podle potřeby, ale že je zapotřebí plán letů, podle kterého by se cestující nebo odesílatelé a příjemci zásilek mohli časově i prostorově orientovat. První plány letů se tvořily poměrně jednoduchou cestou, protože letecký provoz nebyl hustý. Postupy, které byly uplatňovány v minulosti, by již v současných podmínkách nemohly uspět. Intenzita leteckého provozu je vysoká, počet leteckých dopravců operujících na trhu je rovněž vysoký, konkurence mezi dopravci je tak značná a je proto nutné vytvářet takovou nabídku, která bude pro zákazníky ekonomicky co nejpříjemnější.

Letecké dopravce operující v současné době na trhu lze v současné době rozdělit do tří skupin – na letecké dopravce nabízející pouze pravidelné lety, letecké dopravce nabízející lety podle potřeby (charterové dopravci) a letecké dopravce nabízející služby obojího charakteru.

Na charakteru leteckého dopravce závisí částečně i způsob přípravy letového řádu. Obecně platí, že při plánování obsluhy spojů můžeme volit jeden ze dvou přístupů. V prvním přístupu musí být nejdříve sestaven jízdní řád a následně potom podle tohoto jízdního řádu vytvořeny oběhy vozidel. Ve druhém přístupu může být jízdní řád odvozen na základě vytvořených oběhů. První přístup musí být použit v situacích, ve kterých má být přeprava zajištěna v přesně definovaných časových polohách, nebo jsou přípustné pouze malé časové odchylky od těchto poloh. Druhý přístup může být použit v situacích, kdy jsou známy pouze orientační časové polohy spojů a přitom je k dispozici větší časový interval, ve kterém musí být přeprava zajištěna. Pro charterové společnosti, v jejichž podmínkách je zpracovávána tato práce, je typická druhá situace. Zákazníci (cestovní kanceláře objedávající letadlo) požadují, aby přeprava cestujících proběhla v určitém dni. Je tedy lhostejné, zda odlet bude naplánován v 8 hodin ráno nebo ve 14 hodin odpoledne. Důležité je, aby se cestující dostali do místa pobytu nebo zpět v definovaný den.

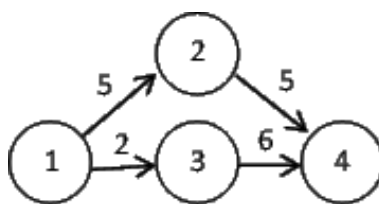
Proto je snahou této práce vytvořit pro potřeby charterového leteckého dopravce obecný matematický přístup k řešení problému tvorby letového řádu na bázi optimalizace nákladů na obsluhu naplánované množiny destinací nebo spojů.

2 Podpůrné metody pro organizaci činností souvisejících s tvorbou letových řádů a rámcový postup vlastní tvorby letového řádu

Matematické nástroje v různém stupni pokročilosti a sofistikovanosti se při tvorbě letových řádů začaly využívat už i v minulosti, jak o tom bude hovořeno v podkapitolách 2.1 – 2.3.

2.1 Síťový graf

Jedná se o jednu z plánovacích technik, s jejíž pomocí lze zobrazit postup činností plánovaných v řešeném projektu (projektem může být rozuměn proces tvorby letového řádu). Na rozdíl od jiných plánovacích technik, jako např. Ganttova diagramu nebo cyklogramů a harmonogramů, síťové grafy neobsahují časová měřítka. Přes uvedený nedostatek velice dobře vystihují vazby mezi jednotlivými událostmi a umožňují zjistit časové rezervy, s jakými mohou být jednotlivé činnosti opožděny tak, aby nedošlo k opoždění konce projektu. Síťový graf je tvořen dvěma typy prvků. Jedná se o uzly a jejich spojnice – tzv. hrany. Hrany vytvářejí posloupnosti vrcholů, ve skutečnosti potom reprezentují jednotlivé činnosti. Ohodnocení hran pak vyjadřuje hodnotu času, který je pro provedení činnosti potřebný. Uzly grafu (někdy též nazývané vrcholy) reprezentují okamžiky zahájení a ukončení jednotlivých činností. Uzly jsou z důvodů orientace očíslovány [14]. Příklad síťového grafu je vidět na obrázku č. 2.1. Pro dokreslení situace je nutno uvést, že existuje i inverzní pojetí koncepce síťového grafu, tzn., že vrcholy reprezentují činnosti a hrany jejich posloupnosti.



Obr. č. 2.1: Síťový graf

Při tvorbě síťového grafu je nutné dodržovat jistá pravidla:

- síťový graf musí mít jeden výchozí a jeden cílový uzel,
- každému uzlu musí předcházet alespoň jedna činnost (s výjimkou výchozího uzlu),
- po každém uzlu musí následovat alespoň jedna činnost (s výjimkou cílového uzlu),
- kterékoliv dva uzly mohou být spojeny pouze jednou činností,
- správná posloupnost časových okamžiků reprezentujících začátky a konce jednotlivých činností v grafu je řešena orientací hrany,
- k vyjádření vazeb lze využít fiktivní činnosti (nespotřebovávají čas ani zdroje),

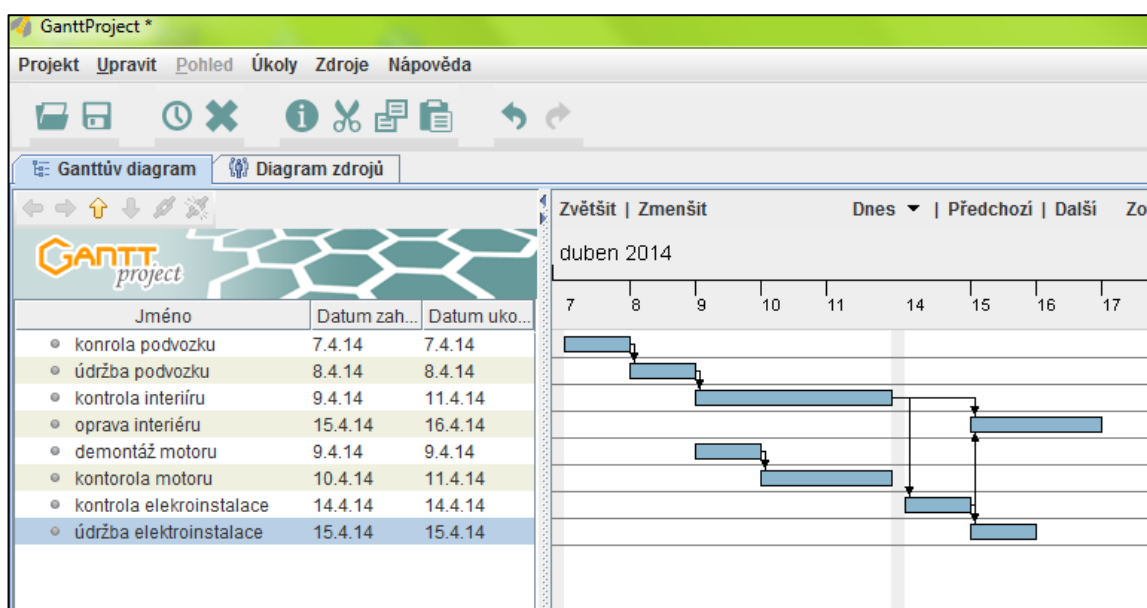
- síťový graf musí být acyklický.

Cílem je najít v síťovém grafu tzv. kritické činnosti, tj. činnosti s nulovou časovou rezervou (jedná se o činnosti, u nichž jakékoliv zdržení bez dalších opatření způsobí prodloužení celkové doby trvání projektu).

Výstupem z vypracovaného síťového grafu může být Ganttův diagram.

2.2 Ganttův diagram

Ganttův diagram slouží ke grafickému znázornění činností v čase. Využívá se při tvorbě projektů a plánování různých činností. V současnosti se k jeho tvorbě využívají programy Microsoft Project, Gantt Project nebo Omniplan. Uvedené softwarové nástroje slouží pro správu projektů a jsou doplněny celou řadou funkcí dovolujících jednotlivé činnosti vzájemně provázat nebo jim přiřazovat určité váhy. Jednodušší Ganttovy diagramy lze vytvořit také v programu Microsoft Excel nebo OpenOffice Calc.



Obr. č. 2.2 Tvorba Ganttova diagramu v programu Gantt Project [15]

Na obrázku č. 2.2 je znázorněno pracovní prostředí programu Gantt Project. Horní lišta pracovního okna obsahuje vstupní menu s různými nástroji používanými při práci. Prostor pod lištou je rozdělen na dvě části. Levá část obsahuje seznam jednotlivých úkolů, které mají být v rámci projektu provedeny. U každé položky lze otevřít nabídku, kde se nastaví konkrétní údaje o definované činnosti, tedy plánované časy zahájení a ukončení činnosti, doba trvání činnosti, vazby na předchozí a následující činnosti a priorita činnosti nebo její grafické (barevné) znázornění v Ganttově diagramu. Pravá část obsahuje samotnou grafickou vizualizaci časového harmonogramu jednotlivých činností v rámci

plánovaného projektu (horizontální osa reprezentuje čas a řádky odpovídají jednotlivým činnostem). Šipky spojující některé činnosti symbolizují vzájemnou návaznost jednotlivých činností.

Letecké charterové společnosti Ganttova diagramu využívají při tvorbě letového řádu. Na vertikální osu jsou nanášena konkrétní letadla a na osu horizontální jsou nanášeny časové údaje týkající se jejich provozu v řešeném období.

2.3 Matematické modelování

Matematické modelování je dalším přístupem k řešení různých problémů spojených s plánováním v letecké dopravě. Odborná literatura uvádí případy, kdy jsou pomocí matematického modelování řešeny problémy související s plánováním harmonogramů letů, posádek [6], harmonogramů údržby [9] nebo plánováním průběhů letů samotných [4], [5] a [7]. Někteří autoři řeší dokonce vzájemnou kombinaci těchto plánů. Nejčastěji se řeší propojení harmonogramů letů s plánováním posádek [1] nebo propojení harmonogramů letů s harmonogramem údržby letadel [2]. Protože reálné problémy jsou zpravidla rozsáhlé (tomu odpovídají i rozsáhlé modely) a ne každý dopravce má k dispozici výpočetní prostředky s nadstandardním výkonem, je snaha modely formulovat tak, aby optimalizační výpočet byl z časového hlediska i z hlediska dodržení běžného výpočetního výkonu co efektivnější [8]. K řešení jednotlivých problémů se využívají různé řešící metody matematického modelování. Při společném plánování harmonogramu letů a posádek se nejčastěji využívá lineárního programování [1], [6] nebo různých heuristických metod [5], [8] často užívaných ve spojení s jinými metodami, např. s dynamickým programováním [2]. Dalším řešícím nástrojem mohou být také memetické algoritmy [3].

2.4 Charakteristika procesu tvorby letového řádu letecké charterové společnosti

Tvorba letových řádů letecké charterové společnosti je velmi zdoluhavý a složitý proces a začíná přibližně rok před sezónou, pro kterou je plánován. Nejedná se o jednoduchou záležitost, kdy se do tabulky pouze naplánují jednotlivé lety podle požadavků cestovních kanceláří. Vytvoření letového řádu je interaktivní proces spojený s celou řadou jednání mezi leteckými dopravci a zákazníky – v tomto případě cestovními kancelářemi. Ve většině případů se při konstrukci letového řádu vychází z letového řádu, který byl vytvořen pro předcházející sezónu. V tomto ohledu samozřejmě mohou mít jistý problém nově vzniklé letecké společnosti nebo nově vzniklé cestovní kanceláře. Samotný systém tvorby letového řádu se ve společnosti stabilizuje několik let.

Jak již bylo uvedeno, celý proces začíná analýzou letového řádu z loňského roku v obchodním oddělení letecké charterové společnosti. V dalším kroku se osloví pravidelní zákazníci a zákazníci s velkým objemem přepravených osob s dotazem, které z loňských spojů mají zájem opětovně obsazovat a neexistují-li v jejich případě nové požadavky na následující sezónu. Analogická analýza probíhá také na straně cestovních kanceláří, kde se připravuje nabídka zájezdů na následující rok. Poté, co cestovní kanceláře zformulují a předají své požadavky letecké společnosti, jsou jednotlivé spoje zaznamenány do Ganttova diagramu, ve kterém už jsou zavedeny i nutné odstávky jednotlivých letadel, například z důvodů údržby. Je prakticky mizivá šance, aby všechny spoje v budoucím letovém řádu přesně odpovídaly požadavkům cestovních kanceláří a zároveň aby vyhověly všem požadavkům na údržbu či jiné plánované odstávky letadel. Proto přichází na řadu dlouhá řada jednání, jejichž výsledkem bývají zpravidla kompromisy na obou stranách. Při těchto jednáních mají samozřejmě výhodu větší cestovní kanceláře, které vytváří větší podíly na tržbách leteckých společností.

2.4.1 Další faktory ovlivňující tvorbu letového řádu

Požadavky cestovních kanceláří však nejsou jedinými faktory, které ovlivňují výslednou podobu letového řádu. Společnost musí analyzovat a následně optimalizovat velké množství logistických a ekonomických procesů ovlivňujících reálný provoz.

Výsledný letový řád musí totiž kromě požadavků cestovních kanceláří zohledňovat také parametry letišť, kapacitní omezení řízení letového provozu, doby letů spojů jednotlivých linek, doby potřebné k obrátům letadel, doby vyčleněné pro pravidelnou údržbu, zálohování letadel, obchodní priority a v neposlední řadě i doby jednotlivých členů posádek strávené ve službě [11].

Parametry letišť

Omezující parametry letišť mají velký vliv na tvorbu letového řádu. Přirozeně proto, že letiště je jedním z hlavních článků letecké dopravy. Z tohoto důvodu se každé omezení, změna či úprava jejich provozu musí promítnout do letových řádů všech leteckých společností, které na daném letišti operují. Omezení při plánování letů vycházejí především z omezení provozních dob letišť, jejich kapacity nebo z omezení z pohledu dalších nabízených služeb:

- provozní doby letišť – některá letiště z důvodů hlukových omezení zavádějí omezenou provozní dobu letiště nebo jeho úplné uzavření v nočních hodinách. Jedná se především o letiště v centrech měst. Omezení provozu může být také na letištích, na kterých naopak je jen velmi malý provoz, a jsou tedy přístupna jen v určitých časových obdobích,
- kapacitní omezení – některá letiště mohou mít kapacitní omezení drah, stojánek, nástupních tunelů atd. Z těchto důvodů jsou dopravcům přidělovány časové intervaly (sloty), ve kterých musí přistát a odletět. K regulacím daného typu dochází většinou v provozních špičkách,
- dostupnost a kvalita služeb – do této kategorie patří především handling, doplňování leteckých pohonných hmot, catering a letová příprava. Většina těchto služeb se řeší na úrovni smluv mezi leteckou společností a poskytovatelem služeb. Co se týče doplňování leteckých pohonných hmot má letecká společnost zpravidla uzavřenu smlouvu s jedním nebo více dodavateli (Shell, Lukoil, ...) a pokud je to možné, tak palivo doplňuje pouze v místech, kde smluvně sjednaný dodavatel pohonných hmot nabízí své služby. Catering si letecké charterové společnosti většinou vozí s sebou na cestu tam i zpět. Výjimkou jsou dlouhé lety. Na některých letištích mohou být tyto služby v době provozní špičky částečně omezeny.

Kapacitní omezení řízení letového provozu

K omezením z hlediska řízení letového provozu se přistupuje zejména v období sezóny, pro které je charakteristická velmi vysoká hustota provozu na frekventovaných trasách. V takovémto případě dochází k přidělování slotů v určitých časech a na určitých místech.

Doby letů na jednotlivých linkách

Doba letu je dána nejen geografickou vzdáleností dané destinace, ale také typem letadla, zatížením jednotlivých segmentů letových cest na trase, organizací řízení letového provozu, zatížením vzletových a přistávacích drah nebo kapacitními omezeními letišť.

Doby potřebné k obrátům letadel

Doby potřebné k obrátům letadel jsou minimální doby, které musí uplynout mezi přílety letadel na letiště a jejich následnými odlety. Doba potřebná k obrátu je ovlivněna rozsahem a kvalitou služeb nabízených na jednotlivých letištích. Závisí také na typu letadla, délce letu, od čehož se odvíjí délka potřebná k tankování leteckých pohonných

hmot a catering a v poslední řadě na výskytu a charakteru dalších služeb (např. na uplatnění požadavku na změnu uspořádání přepravního prostoru).

Pravidelná údržba

Každé letadlo musí pravidelně absolvovat technickou kontrolou. Intenzita těchto kontrol závisí především na typu letadla, ale také na interních předpisech provozovatele a na regulatorních požadavcích státu, ve kterém je letadlo registrováno. O nutnosti provést na letadle údržbu rozhoduje několik faktorů. Patří mezi ně např. počet absolvovaných cyklů nebo počet letových hodin. Hodnoty těchto faktorů obvykle nejsou konstantní pro letadlo jako celek. Jednotlivé segmenty letadla mají různé požadavky na počet absolvovaných cyklů nebo počet letových hodin.

Zálohování letadel

Zálohování letadlové kapacity se provádí pro případ nepředvídatelné situace, jako například výskyt technické závady nebo zpoždění letu nebo pro jiné závažné důvody.

Povolená doba ve službě

Piloti a palubní personál mají stanovenou maximální dobu, po kterou mohou být ve službě a minimální časy potřebné na odpočinek. Uvedené doby je nutno z důvodů zachování bezpečnosti striktně dodržovat.

Obchodní priority

Na výslednou podobu letového řádu mají vliv i obchodní priority letecké společnosti a jejich partnerů. To znamená, že velkým zákazníkům jsou přidělovány lukrativnější časy odletů než menším cestovním kancelářím. V rámci jednání si také někteří významní zákazníci mohou vyjednat časy odletů takové, jaké požadují.

3 Základní rámec potřebný pro matematické modelování problému

3.1 Základní úvahy související s procesem optimalizace

Ve slovníku cizích slov je termín optimalizace charakterizován jako proces výběru nejlepší varianty z množství variant možných (přípustných). Má-li proběhnout nějaký výběr, je nutné, aby jej předcházelo rozhodnutí, na základě jakých kritérií má být výběr nejvhodnější varianty uskutečněn. Podle definovaného kritéria je rovněž možné porovnání, do jaké míry je navrhovaný stav lepší než stav současný, tj. před optimalizací. Kritérium se volí podle toho, co se od daného procesu optimalizace očekává, např. celkové náklady, je-li snaha hledat úspory ekonomického charakteru apod. Obecně lze konstatovat, že „společným jmenovatelem“ pro volbu kritéria je zvýšení konkurenceschopnosti zadavatele v oblastech, ve kterých očekává určité rezervy.

Proces optimalizace, tj. postup výběru optimálního řešení, by měl být cílený a zároveň časově efektivní. Problém může nastat v situaci, kdy k výpočtu hodnoty optimalizačního kritéria, které si přeje zadavatel použít, není dostatek informací a dat. V takovém případě se musí zvolit jiné optimalizační kritérium, ke kterému je možno dostatek vstupních dat opatřit, přičemž je žádoucí, aby nově zformulované kritérium určitým způsobem kopírovalo kritérium původní. Např. v případě dopravní společnosti lze maximalizaci zisků částečně nahradit kritériem maximalizace počtu přepravených cestujících nebo minimalizací provozních nákladů [9].

3.2 Úvod k matematickému programování

Matematické programování je ve srovnání s klasickými matematickými disciplínami relativně mladý obor, protože počátky jeho využívání pro civilní účely se datují někdy do padesátých let minulého století. Velký rozmach tohoto matematického odvětví nastal zejména s rozvojem výpočetní techniky, protože byla potřeba navržené teoretické poznatky aplikovat prakticky na úlohy značných rozsahů.

Matematické programování má široké spektrum využití. Obecně lze říci, že matematické modelování poskytuje metody k efektivnímu rozdělování omezených prostředků. Využívá se především v situacích, ve kterých se vyskytuje požadavek na přijetí určitých rozhodnutí. Z uvedeného důvodu postupem času proniklo do mnoha oblastí vědy, techniky a ekonomiky, dopravu nevyjímaje. S matematickým modelováním se lze setkat při organizaci všech druhů dopravy, procesního plánování, výstavbě sítí, plánování výroby, zásobování a přepravy osob či materiálu.

Podle charakteru modelu z hlediska výskytu matematických operací se matematické programování dělí na lineární a nelineární. V dalším textu budou informace vztaženy k lineárnímu programování, kterého bude také při řešení dané problematiky užito [10].

3.3 Tvorba lineárních matematických modelů

Lineární programování je vhodným nástrojem pro procesní rozhodování v rámci plánovacích úloh. Jeho nespornou výhodou je fakt, že pokud má řešitel k dispozici dostatečný výpočetní výkon a dostatek času k řešení, pak je zpravidla garantováno nalezení optimálního řešení.

Lineární matematické modely obsahují vždy dvě skupiny veličin:

- konstanty,
- proměnné.

Konstanty jsou veličiny, které jsou před výpočtem do modelu vloženy, a jejichž hodnoty se během výpočtu nemění. Naopak, proměnné jsou veličiny, jejichž hodnota se během výpočtu neustále mění. Počet konstant je takřka neomezený a závisí na řešiteli, kolik jich do modelu zavede. Počet proměnných je závislý na počtu rozhodnutí, která mají být uskutečněna. V některých případech je nutné kromě rozhodovacích proměnných zavést i proměnné pomocné.

Každá proměnná musí mít před tvorbou matematického modelu jednoznačně přidělen definiční obor. V lineárním programování se používají tři typy definičních oborů:

- množina nezáporných čísel,
- množina celých nezáporných čísel,
- množina hodnot 0 a 1 (proměnná s tímto definičním oborem se označuje pojmem bivalentní proměnná).

Co se týče významu hodnot bivalentních proměnných použitých v práci, bude v celém textu práce uplatněna zažitá konvence, že hodnota 1 bivalentní proměnné bude vyjadřovat kladné rozhodnutí a hodnota 0 bude reprezentovat rozhodnutí záporné.

Rozhodnutí o tom, jaký definiční obor bude k té dané proměnné přidělen, závisí na povaze rozhodnutí, které daná proměnná modeluje. Např. je-li cílem modelu optimalizovat dobu letu na palubě letadla, potom se jako definiční obor proměnné zvolí množina nezáporných čísel. V případě, kdy se během optimalizace bude rozhodovat, zda letadlo na linku bude či nebude nasazeno, pak se definiční obor proměnné zvolí bivalentní proměnná.

Existuje-li možnost, že proměnná může nabývat hodnot z více definičních oborů, přičemž mezi možnými definičními obory je přípustný definiční obor pokrývající množinu nezáporných čísel, potom se tento definiční obor preferuje. Důvodem preference tohoto oboru je, že současné výpočetní prostředky mají vyšší kapacitní možnosti z hlediska řešení zadané úlohy.

Každý lineární matematický model se skládá ze dvou částí:

- soustavy omezujících podmínek,
- účelové funkce reprezentující zvolené optimalizační kritérium.

Soustava omezujících podmínek vymezuje množinu přípustných řešení úlohy. Omezující podmínky lze rozdělit do dvou skupin:

- strukturální,
- obligatorní.

Strukturální podmínky v modelu reprezentují definovaná reálná omezení nebo vytvářejí vazby mezi jednotlivými proměnnými ať již rozhodovacími nebo pomocnými. Počet strukturálních podmínek je závislý na množství reálných omezení a počtu vazeb, které je nutné mezi proměnnými vytvořit. U proměnných reprezentujících reálná omezení platí, že musí mít tzv. jednotkovou konzistenci, tzn., že výrazy na obou stranách podmínky musí mít stejné jednotky. V případě vazebních podmínek tento předpoklad nemusí být splněn.

Obligatorní podmínky popisují definiční obory proměnných. Počet obligatorních podmínek je roven počtu proměnných použitých v daném modelu.

Účelová funkce vyjadřuje funkční vztah, s jehož pomocí se vypočítá hodnota optimalizované veličiny. U účelové funkce se musí označit typ extrému optimalizované veličiny. Např. pokud se optimalizují náklady na přepravu, bude snahou hodnotu účelové funkce minimalizovat. Naopak v případě optimalizace objemu přepravy zboží bude nejspíš cílem hodnotu účelové funkce maximalizovat.

V účelové funkci musí být zavedeny všechny varianty výpočtu optimalizované veličiny. V případě, že by některé z nich byly zanedbány, pak algoritmus vlastního optimalizačního výpočtu k těmto variantám nebude přihlížet.

Při optimalizaci, kdy se v modelu vyskytuje pouze jediná účelová funkce, je nutné si uvědomit, že algoritmus výpočtu opomíjí všechna ostatní kritéria. Proto může dojít k situaci, že při výpočtu dojde ke zlepšení pouze jedné veličiny a zároveň budou zhoršeny

hodnoty ostatních kritérií, která v účelové funkci nejsou zahrnuta. Z toho důvodu se v podobných situacích přistupuje k řešení pomocí vícekritériální optimalizace nebo zavedením podmínek, které zajistí, že při optimalizaci nedojde ke zhoršení hodnot ostatních kritérií. Při zavedení dalších optimalizačních kritérií do modelu formou doplňujících podmínek se však musí počítat s tím, že během řešení bude zajištěno pouze jejich dodržování, nikoli jejich optimalizace.

Při řešení úloh lineárního programování mohou nastat tři situace:

- úloha má optimální řešení – úloha může mít jedno, více nebo nekonečně mnoho řešení,
- úloha nemá optimální řešení, protože množina přípustných řešení je prázdná – v úloze nelze splnit všechny omezující podmínky současně,
- optimální řešení nelze najít, protože množina přípustných řešení je ve směru optimalizace neohrazená.

Při sestavování lineárních modelů se řešitel musí řídit přísnými pravidly. Jejich nedodržení může způsobit, že model se stane nelineární, což může způsobit problémy s jeho řešitelností, protože nelineární modely se obecně řeší mnohem obtížněji.

Základní pravidla pro sestavování lineárních modelů:

- proměnné je dovoleno mezi sebou sčítat, odčítat nebo násobit reálnou konstantou,
- při tvorbě omezujících podmínek je povoleno používat relační znaménka \geq , \leq , $=$.

Při tvorbě modelu je důležité myslet i na to, jak je daný model rozsáhlý. Jeho velikost závisí na počtu entit, omezujících podmínek a proměnných. Je poměrně logické, že pokud je model menší (obsahuje menší počet proměnných a podmínek), jeho řešení je snazší. U rozsáhlých modelů je velmi důležitým faktorem také efektivita výpočtu, kdy je nutné si všimnout vlastní doby výpočtu. Může totiž nastat situace, že zadání údajů do výpočetního software a výpočetní čas přesáhnou celkovou dobu, která je pro rozhodování k dispozici [9].

V lineárním programování je celkem běžný fakt, že k řešení stejného typu úlohy jsou použity různé modely. To souvisí i s běžně se vyskytující praxí, že některé matematické problémy je možno řešit více způsoby. Existuje-li pro řešení úlohy více modelů, potom je za výhodnější brán právě ten, který je výkonnější (zvládne řešit úlohy většího rozsahu, doba vlastního výpočtu je kratší apod.).

4 Návrh matematických modelů

4.1 Společné vlastnosti modelů

Cílem modelů je vytvořit letový řád tak, aby se minimalizovaly náklady na obsluhu naplánované množiny destinací nebo spojů.

Při tvorbě modelů budou uvažovány případy, kdy charterová společnost bude provozovat svou činnost z jednoho nebo více letišť (v závislosti na variantě modelu) a počet cílových destinací nebude omezen. V modelu nebude zohledňována kapacita letadel. Je to z toho důvodu, že cestovní kanceláře si ve většině případů poptávají celé letadlo. Proto není nutné v modelu řešit problémy související s maximálním vytěžováním kapacity letadel.

Co se týče časového rozložení letů, uplatňuje se zásada, že charterová společnost je vázána pouze dnem, kdy cestující musí nastoupit dovolenou ve svém resortu. Letecká společnost má tedy poměrně velkou volnost v tom, kdy daný let během určeného dne uskuteční. Zásadními omezeními, co se týče časové polohy letu, jak již bylo uvedeno výše v textu, mohou být omezená provozní doba letišť, kapacitní omezení přistávacích a vzletových drah nebo kapacitní omezení vzdušných cest v době provozních špiček. Vliv uvedených faktorů je v navrhovaných modelech a výpočetních experimentech, věnovaných potvrzení funkčnosti modelů, zanedbán. Z hlediska návrhu modelů se vliv uvedených faktorů projeví zejména v soustavě omezujících podmínek, konkrétně v omezení dob, ve kterých lze uskutečňovat lety.

V experimentální části práce bude funkčnost navržených modelů testována na množině letů, které je třeba uskutečnit v kratším časovém období. Proto také při konstrukci modelu není uvažováno s odstávkami letadel za účelem pravidelných kontrol. Pokud by bylo uvažováno s plánem letů na delší období, je zapotřebí vliv pravidelných kontrol v matematickém modelu zohlednit. Soustava omezujících podmínek by musela v takovém případě obsahovat omezující podmínky, které by měly za úkol zajistit, aby při plánování letů byla dodržena všechna provozní omezení vyplývající z nutnosti realizace uvedených kontrol. Zároveň by model musel pracovat se vstupními daty, které by na začátku plánovacího období u každého letadla zahrnutého v úloze definovaly hodnoty parametrů klíčových z hlediska naplánování pravidelných kontrol a dále s podmínkami, které umožní hodnoty parametrů potřebných pro rozhodnutí o odstávce letadla za účelem pravidelné kontroly v průběhu plánovacího období aktualizovat v závislosti na skutečně realizovaném výkonu. Konečně by soustava omezujících podmínek musela zajistit

skutečnost, že letadlo, kterému bude nařízena pravidelná kontrola, nebude v době kontroly možno nasadit k obsluze žádného letu.

Další omezení, které může ohrozit aplikaci lineárního programování na řešený problém, vyplývá z kapacitních omezení optimalizačních software. Kapacitní parametry optimalizačních software totiž ovlivňují řešitelnost modelů. Např. software Xpress-IVE, resp. jeho akademická verze, ve které budou navržené modely řešeny, je limitován omezeným počtem entit, proměnných a strukturálních podmínek.

Vzhledem k tomu, že cílem optimalizace je minimalizace nákladů na zajištění definované množiny letů, je nutné do něj započítat především všechny rozhodující ekonomické veličiny vztahující se k letům samotným. V navržených modelech budou vystupovat následující kategorie ekonomických veličin:

- náklady na letecké pohonné hmoty,
- přeletové poplatky,
- náklady na handling,
- fixní náklady spojené s nasazením každého letadla pro obsluhu spojů (destinací).

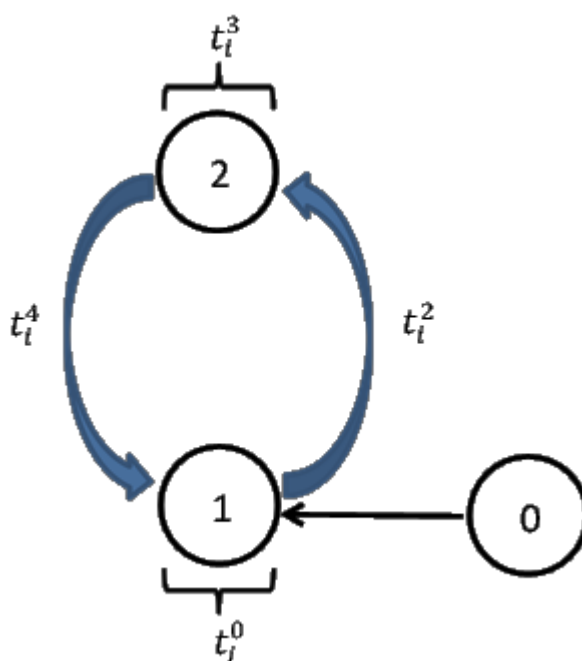
Jmenované ekonomické veličiny sice nejsou jediné, které ovlivňují celkové ekonomické hospodaření společnosti, nicméně pro potřeby modelu mají dostatečnou vypovídací schopnost, zohledňují klíčové parametry řešeného problému při zachování jeho maximální přehlednosti a dostatečné funkčnosti.

Rozhodnutí, která se od řešitelů očekávají, jsou v matematickém modelování obecně reprezentována proměnnými. Význam jednotlivých proměnných se volí v závislosti na typu řešeného problému, rozsahu a interpretaci očekávaných rozhodnutí, což bude zřejmé i z dalšího textu. V níže uvedených modelech (v závislosti na variantě modelu) budou proměnné modelovat doby strávené na domovském letišti před lety do destinací (odlety spojů), časy odletů do destinací (časy odletů spojů), doby strávené v destinacích, doby strávené na letištích po absolvování spojů a návaznost spojů. Jejich počet bude záviset např. na počtech cílových destinací nebo na počtech spojů, které letecká společnost plánuje obsloužit.

4.2 Model pro tvorbu letového řádu letecké charterové společnosti – varianta I

Tento model je použitelný v situaci, kdy letecká charterová společnost svou činnost provozuje pouze z jednoho letiště. To znamená, že svá letadla vysílá z domovského letiště do destinací nasmlouvaných s cestovními kancelářemi. Lety jsou uskutečňovány ve dnech podle požadavků cestovních kanceláří tak, aby cestující v daný den nastoupili pobyt v resortu v příslušné destinaci, to vše za účelem minimalizace nákladů na fungování celého systému.

Na obrázku č. 4.1 je uveden schématický příklad organizace obsluhy cílové destinace skládající se z 1 oběhu.

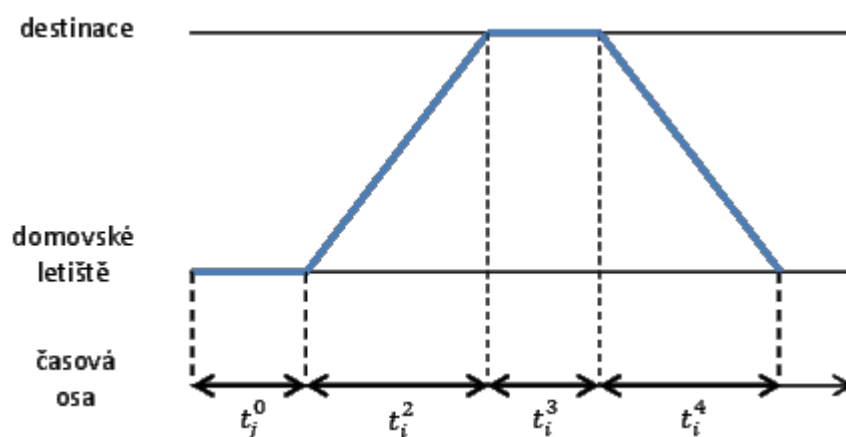


Obr. č. 4.1 Obsluha cílové destinace skládající se z 1 oběhu

Vrchol 0 reprezentuje základnu provozovatele. V modelu se objeví vždy tehdy, bude-li nutné použít další letadlo. Vrchol 1 reprezentuje domovské letiště a vrchol 2 cílovou destinaci. Dále jsou na obrázku znázorněny doby, které mají vliv na délku celého oběhu.

- t_j^0 – doba strávená na domovském letišti,
- t_i^2 – doba letu z domovského letiště do destinace,
- t_i^3 – doba strávená na letišti v destinaci,
- t_i^4 – doba letu z destinace na domovské letiště.

Průběh oběhu je možno znázornit také pomocí časové osy, viz obrázek č. 4.2.



Obr. č. 4.2 Průběh oběhu na časové ose

4.2.1 Formulace problému

Je dáno domovské letiště, ze kterého má letecká společnost provozovat charterové lety do destinací požadovaných cestovními kanceláři. Je dána množina cílových destinací I , pro kterou platí $|I| = m$. Dále je známo, ve kterých obdobích musí být dané lety uskutečněny. Pro každou cílovou destinaci $i \in I$ je definováno období, ve kterém musí být tato destinace obsloužena – začátek období $i \in I$ bude označen dz_i a jeho konec dk_i . Ve výpočetních experimentech budou začátky a konce období odpovídat začátkům a koncům kalendářních dní v průběhu týdne. Jsou známy hodnoty nákladů na handling na domovském letišti h_0 po každém přeletu z cílové destinace, hodnoty nákladů na handling v cílové destinaci $j \in I - h_j$, hodnoty přeletových poplatků při letu do cílové destinace $j \in I - p_j^1$, hodnoty přeletových poplatků při letu zpět na domovské letiště p_j^2 , cena paliva na domovském letišti c_0 , ceny paliva v cílových destinacích c_j , spotřeba paliva letadla s , doby letů do cílových destinací t_i^2 , doby letů zpět na domovské letiště t_i^4 , časové rezervy potřebné k odbavení cestujících a jejich přesunutí do resortu t^5 , hodnoty fixních nákladů vyvolaných použitím dalšího letadla f_j . Předpokládá se, že letadlo bude doplňovat letecké pohonné hmoty po každém přistání.

V modelu bude rozhodováno o časových polohách jednotlivých letů do daných cílových destinací, časových návaznostech letů, dobách pobytů na domovském letišti před odletem do cílových destinací a dobách pobytů na letištích cílových destinací. Časy odletů do cílových destinací budou modelovány proměnnými t_i^1 , kde $i \in I$. Časová návaznost spojů je modelována pomocí bivalentních proměnných $x_{i,j}$. Situace, kdy $x_{i,j} = 1$, modeluje stav, kdy totéž letadlo po obsluze cílové destinace $i \in I$ bude použito

k obsluze cílové destinace $j \in I$. Doby pobytů na domovském letišti před odletem do destinace $j \in I$ budou označeny symboly t_j^0 a doby pobytů na letištích cílových destinací symboly $-t_i^3$.

Optimalizačním kritériem jsou náklady na obsluhu zadané množiny destinací.

Při provozu systému bude vyžadováno, aby byly obslouženy všechny zadané destinace. Pojmem destinace jsou označována cílová letiště všech letů. Bude-li v podmínkách varianty č. 1 modelu cílové letiště opětovně obsluhováno v jinou dobu, bude pro potřeby modelu označeno odlišným indexem.

Pozn.

Horní index použitý ve zvolených symbolech nereprezentuje mocnitele, nýbrž vztahuje se k fázi letu.

4.2.2 *Rekapitulace použitých zkratk a popis jejich významu v modelu*

Konstanty:

h_0	náklady na handling na domovském letišti (p_j)
h_j	náklady na handling v cílové destinaci $j \in I$ (p_j)
p_j^1	poplatky při letu do cílové destinace $j \in I$ (p_j)
p_j^2	poplatky při letu z cílové destinace $j \in I$ na domovské letiště (p_j)
c_0	cena paliva na domovském letišti (Kč. l^{-1})
c_j	cena paliva v cílové destinaci $j \in I$ (Kč. l^{-1})
s	spotřeba paliva ($l \cdot \min^{-1}$)
t_i^2	doba letu do cílové destinace $i \in I$ (min)
t_i^4	doba letu z cílové destinace $i \in I$ na domovské letiště (min)
t^5	časová rezerva – odbavení a přesunutí cestujících do resortu (min)
f_j	fixní náklady nutné pro použití letadla pro obsluhu destinace $j \in I$ (p_j)
dz_i	začátek období přípustnosti pro spoj letící do cílové destinace $i \in I$ (min)
dk_i	konec období přípustnosti pro spoj letící do cílové destinace $i \in I$ (min)
T	prohibitivní konstanta

Proměnné:

t_j^0	doba strávená na domovském letišti před odletem do cílové destinace $j \in I$ (<i>min</i>)
t_i^1	čas odletu do cílové destinace $i \in I$ (<i>min</i>)
t_i^3	doba strávená v cílové destinaci $i \in I$ (<i>min</i>)
$x_{i,j}$	proměnná modelující návaznost spojů (letadlo po obsluze spoje $i \in I$ se přesune k obsluze spoje $j \in I$)

4.2.3 Matematický model úlohy

Matematický model řešené úlohy má tvar:

$$\min f(x, t^0, t^1, t^3) = \quad (4.2.1)$$

$$= \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^m (h^0 + p_j^1 + h_j + p_j^2 + t_j^2 c_j s + t_j^4 c_0 s) x_{i,j} + \sum_{j=1}^m f_j x_{0,j}$$

$$\sum_{i=0}^m x_{i,j} = 1 \quad j = 1..m \quad (4.2.2)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} \leq 1 \quad i = 1..m \quad (4.2.3)$$

$$t_j^1 - (t_i^1 + t_i^2 + t_i^3 + t_i^4 + t_j^0) \geq T (x_{i,j} - 1) \quad i = 0..m ; j = 1..m \quad (4.2.4)$$

$$t_j^0 \geq 60 \quad j = 1..m \quad (4.2.5)$$

$$t_i^3 \geq 60 \quad i = 0..m \quad (4.2.6)$$

$$dz_i - (t^5 + t_i^2) \leq t_i^1 \quad i = 0..m \quad (4.2.7)$$

$$t_i^1 \leq dk_i - (t^5 + t_i^2) \quad i = 0..m \quad (4.2.8)$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\} \quad i = 0..m; j = 1..m \quad (4.2.9)$$

$$t_j^0 \in R^+ \quad j = 1..m \quad (4.2.10)$$

$$t_i^1 \in R^+ \quad i = 0..m \quad (4.2.11)$$

$$t_i^3 \in R^+ \quad i = 0..m \quad (4.2.12)$$

Rovnice (4.2.1) je účelovou funkcí reprezentující náklady spojené s obsluhou naplánované množiny destinací. Kritérium je složeno ze dvou členů. První člen (výraz) v účelové funkci popisuje veškeré přímé náklady na obsluhu destinací. Zahrnuje v sobě náklady na handling na domovském letišti (h^0) a handling v cílové destinaci (h_j), poplatky při letu do cílové destinace a zpět (p_j^1, p_j^2) a náklady na palivo doplněné jak před odletem z domovského letiště, tak i před návratem z cílové destinace. Náklady na palivo se vypočítají součinem příslušné doby letu (t_j^2, t_j^4), cen paliva na domovském letišti a v cílových destinacích (c_0, c_j) a spotřeby letadla (s). Druhý výraz v účelové funkci reprezentuje fixní náklady vznikající při nasazení každého letadla k obsluze naplánované množiny destinací. Součtem obou částí potom vznikají celkové náklady na obsluhu naplánované množiny destinací.

Aby se model choval korektně podle požadavků praxe, je třeba zavést soustavu omezujících podmínek reprezentujících reálná omezení, příp. vytvořit logické vazby mezi proměnnými modelujícími vzájemně se podmiňující rozhodnutí.

Skupina omezujících podmínek (4.2.2) zajistí, že k obsluze každé destinace bude použito právě jedno letadlo. Nebude-li podmínka zařazena do soustavy omezujících podmínek, dojde k tomu, že algoritmus minimalizující hodnotu účelové funkce položí všechny proměnné $x_{i,j}$ rovny 0, což mu umožní dosáhnout nulových (tedy minimálních) nákladů.

Skupina omezujících podmínek (4.2.3) zajistí, že po obsluze každé destinace $i \in I$ letadlo buď bude nasazeno k obsluze dalšího destinace, nebo svůj provoz v optimalizovaném systému ukončí. V případě opomenutí této podmínky by mohlo dojít k jevu, že na jednu destinaci $i \in I$ by mohla být navázána obsluha více destinací, což je z hlediska plánování nepřipustné.

Skupina omezujících podmínek (4.2.4) zajišťuje přípustnou časovou návaznost spojů a zároveň zajišťuje vazbu mezi proměnnými $t_j^0, t_i^1, t_i^3, x_{i,j}$. V modelu musí být zajištěno, aby pro dané letadlo nebyl vytvořen oběh, ve kterém čas odletu navazujícího letu do cílové destinace (t_j^1) nastane dříve, než čas příletu letu z předchozí cílové destinace zvýšený

o nutnou dobu obratu na domovském letišti. Čas příletu letadla přilétajícího z cílové destinace $i \in I$ se vypočítá jako součet času odletu (t_i^1), doby letu do cílové destinace $i \in I$ (t_i^2), doby strávené v cílové destinaci (t_i^3), doby letu zpět na domovské letiště (t_i^4) a doby potřebné k přípravě letadla na let do další cílové destinace (t_j^0). Tato podmínka bude aktivní pouze v situacích, kdy na levé straně nerovnice bude záporná hodnota (v těchto situacích zajistí, že bude platit $x_{i,j} = 0$). Pokud by skupina podmínek (4.2.4) nebyla do modelu zařazena, mohlo by vzniknout nepřipustné řešení z pohledu časové návaznosti spojů. V modelu by pak mohla nastat situace, kdy by totéž letadlo bylo ve stejný okamžik nasazeno k obsluze více destinací nebo k obsluze některé destinace a současně např. i k přípravě na obsluhu některé destinace.

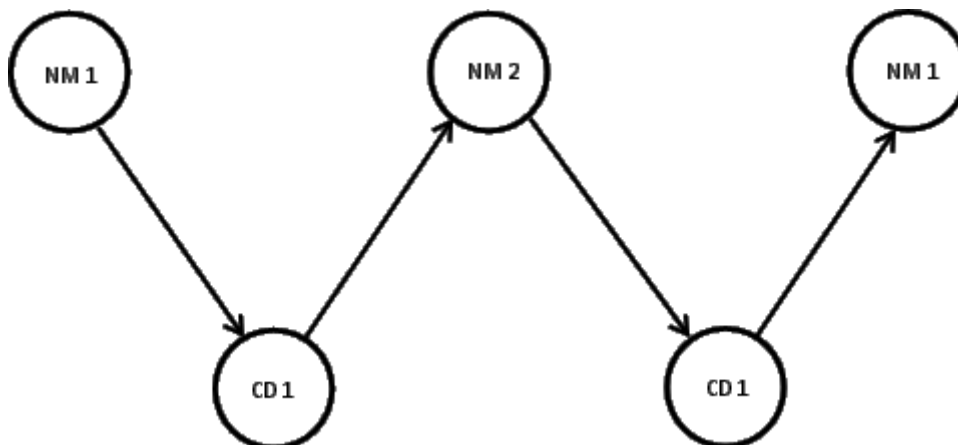
Skupiny omezujících podmínek (4.2.5) a (4.2.6) zajišťují dodržení minimálních dob potřebných k provedení všech nutných úkonů na domovském letišti (t_j^0) a v cílové destinaci (t_i^3) – v navrhovaných modelech i ve výpočetních experimentech bude uvažováno s hodnotou 60 min a to jak pro domovské letiště tak i letiště cílové destinace. Pokud bude podmínka v modelu chybět, model se bude snažit hodnoty časů minimalizovat, protože tyto proměnné mají přímý vliv na výslednou hodnotu účelové funkce. Vynechání podmínek by mohlo vést k tomu, že bude sestaven takový letový řád, který neumožní vytvořit dostatečnou časovou rezervu pro přípravu letadla na let do cílové destinace nebo zpět.

Skupiny časových omezujících podmínek (4.2.7) a (4.2.8) upravují hodnoty časových intervalů, ve kterých má být let uskutečněn. Pomocí těchto podmínek jsou splněny požadavky cestovních kanceláří na den odletu daného spoje do určité destinace. Čas odletu (t_i^1) musí být vždy z intervalu, který je zdola omezen začátkem (dz_i) dne a shora omezen jeho koncem (dk_i). Od obou hodnot je odečtena doba letu (t_i^2) a doba potřebná na odbavení cestujících a jejich přesun do resortu (t_i^5). Obě skupiny podmínek se dají zapsat v souhrnném tvaru $dz_i \leq t_i^1 + t_i^2 + t_i^5 \leq dk_i$.

Skupiny podmínek (4.2.9), (4.2.10), (4.2.11) a (4.2.12) deklarují definiční obory jednotlivých proměnných. Podmínky (4.2.9) vyjadřují, že proměnné $x_{i,j}$ jsou bivalentní. Ostatní podmínky (4.2.10), (4.2.11) a (4.2.12) vyjadřují, že definiční obory proměnných t_j^0 , t_i^1 a t_i^3 jsou reprezentovány množinami nezáporných čísel.

4.3 Model pro tvorbu letového řádu letecké charterové společnosti – varianta II

Model je použitelný v situaci, kdy charterová letecká společnost má jednu základnu, ale zároveň dvě nebo více nástupních míst. Varianta modelu umožňuje zavést při obsluze letovisek systém, který je pro potřeby práce označen, jako systém W. Jedná se o dnes velmi často využívaný systém, obsluhy jednotlivých spojů, kdy je snaha, aby letadlo při obsluze jednoho letoviska obsloužilo dvě nebo více nástupních míst.



Obr. č. 4.3 Systém obsluhy W

- NM 1 – nástupní místo 1,
- NM 2 – nástupní místo 2,
- CD 1 – obsluhovaná cílová destinace 1.

Na obrázku č. 4.3 je graficky znázorněn systém obsluhy W. Nejprve letadlo letí s novými cestujícími z NM 1 do CD 1. V CD 1 tito cestující vystoupí a nastoupí cestující, kteří se vrací zpět do NM 2. V NM 2 vystoupí cestující z CD 1 a nastoupí cestující, kteří teprve do CD 1 směřují. Po přeletu do cílové destinace 1 a výstupu cestujících přepravených z NM 2 do letadla nastoupí cestující, kteří směřují zpět do nástupního místo 1. Je patrné, že z obou nástupních míst byli odvezeni noví cestující, kteří směřovali do cílové destinace 1 a zároveň z cílové destinace 1 byli všichni cestující rozvezeni zpět do původních nástupních míst (při vynaložení nulových nákladů na přelety mezi jednotlivými letišti). Příkladem systému W může být následující obsluha Praha – Hurghada – Ostrava – Hurghada – Praha.

Aby algoritmus, je-li to výhodné, uplatnil požadovaný systém W, bylo nutné zavést matici nákladů, ve které jsou obsaženy náklady na přesun mezi jednotlivými spoji.

4.3.1 Formulace problému

Je dána množina nástupních míst, z toho jedno z nich je domovské letiště, prostřednictvím kterého každé letadlo vstupuje do systému. Z definovaných nástupních míst jsou vypravovány lety do cílových destinací. Je dána množina spojů I , pro kterou platí $|I| = m$. Pro každý spoj $i \in I$ je definováno období, ve kterém musí být daný spoj obsloužen – začátek období $i \in I$ bude označen dz_i a jeho konec dk_i . Dále jsou známy náklady na handling před absolvováním spoje $i \in I$ – h_i , náklady na přeletové poplatky při absolvování spoje $i \in I$ – p_i , ceny za litr paliva potřebného pro absolvování spoje $i \in I$ – c_i a doby letů jednotlivých spojů $i \in I$ – t_i^2 . Dále je známa matice nákladů $n_{i,j}$ nutných na přesun z cílového letiště spoje $i \in I$ na výchozí letiště spoje $j \in I$, hodnoty fixních nákladů vyvolaných použitím dalšího letadla f_j a spotřeba paliva s . Předpokládají se různé ceny paliva a skutečnost, že letadlo musí doplňovat pohonné hmoty před každým startem (před každým naplánovaným spojem).

V modelu se rozhoduje o časových polohách jednotlivých spojů reprezentovaných časy odletů, časové návaznosti spojů $j \in I$ na spoje $i \in I$ a dobách strávených na letišti po absolvování každého spoje $i \in I$. Časy odletů do cílových destinací jsou modelovány proměnnými t_i^1 , kde $i \in I$. Časové návaznosti spojů jsou modelovány pomocí bivalentních proměnných $x_{i,j}$. Situace, kdy $x_{i,j} = 1$, modeluje stav, kdy totéž letadlo po obsluze spoje $i \in I$ bude nasazeno k obsluze spoje $j \in I$. Doba strávená na letišti po absolvování spoje $i \in I$ je modelována proměnnou t_i^3 . Ve srovnání s předchozím modelem zde není z důvodů zjednodušení použita konstanta t^5 , reprezentující časovou rezervu potřebnou pro odbavení cestujících a jejich přesun do resortu. Pokud by bylo nutné její použití, zapracuje se do modelu stejným způsobem jako ve variantě 1. Lety musí být realizovány tak, aby odpovídaly časovým požadavkům cestovních kanceláří.

Optimalizačním kritériem jsou opět náklady na obsluhu zadané množiny spojů.

4.3.2 Popis použitých zkratek a označení

Konstanty:

h_i	náklady na handling před absolvováním spoje $i \in I$ (pj)
p_i	náklady na přeletové poplatky spoje $i \in I$ (pj)
$n_{i,j}$	náklady na přesun letadla po obsluze spoje $i \in I$ k obsluze spoje $j \in I$ (pj)
c_i	cena paliva potřebného pro spoj $i \in I$ ($Kč. l^{-1}$)
s	spotřeba paliva ($l. min^{-1}$)
t_i^2	doba letu spoje $i \in I$ (min)
dz_i	začátek období, ve kterém má být spoj $i \in I$ uskutečněn (min)
dk_i	konec období, ve kterém má být spoj $j \in I$ uskutečněn (min)
f_j	fixní náklady spojené s použitím letadla (pj)
T	prohibitivní konstanta

Proměnné:

t_i^1	čas odletu spoje $i \in I$ (min)
t_i^3	doba strávená na letišti po absolvování spoje $i \in I$ (min)
$x_{i,j}$	proměnná modelující návaznost spojů (letadlo po obsluze spoje $i \in I$ se přesune k obsluze spoje $j \in I$)

4.3.3 Model

Matematický model řešené úlohy má tvar:

$$\min f(x, t^1, t^3) = \sum_{i=1}^m f_j x_{0,j} + \sum_{i=1}^m (p_i + h_i + (t_i^2 s c_i)) + \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^m n_{i,j} x_{i,j} \quad (4.3.1)$$

$$\sum_{i=0}^m x_{i,j} = 1 \quad j = 1..m \quad (4.3.2)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} \leq 1 \quad i = 1..m \quad (4.3.3)$$

$$t_j^1 - (t_i^1 + t_i^2 + t_i^3) \geq T (x_{i,j} - 1) \quad i = 0..m ; j = 1..m \quad (4.3.4)$$

$$t_i^3 \geq 60 \quad i = 0..m \quad (4.3.5)$$

$$dz_i \leq t_i^1 \quad i = 0..m \quad (4.3.6)$$

$$t_i^1 \leq dk_i \quad i = 0..m \quad (4.3.7)$$

$$x_{i,i} = 0 \quad i = 1..m \quad (4.3.8)$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\} \quad i = 0..m; j = 1..m \quad (4.3.9)$$

$$t_i^1 \in R^+ \quad i = 0..m \quad (4.3.10)$$

$$t_i^3 \in R^+ \quad i = 0..m \quad (4.3.11)$$

Rovnice (4.3.1) popisuje účelovou funkci, pomocí které se vypočítají přímé náklady na obsluhu spojů. Pravou stranu rovnice lze rozdělit na tři části podle jednotlivých sumačních členů. První část popisuje fixní náklady (f_j) spojené s nasazením letadel k obsluze dané množiny spojů. Druhý sumační člen sčítá všechny náklady na přeletové poplatky (p_i), náklady na handling (h_i) a palivové náklady vztažené ke všem uskutečněným spojům. Palivové náklady se vypočítají součinem doby letu spoje (t_i^2), ceny paliva (c_i), které je natankováno na daný spoj a spotřebou letadla (s). Poslední část obsahuje náklady na případné přesuny letadel mezi navazujícími spoji. Náklady na všechny možné přesuny jsou uvedeny v matici nákladů ($n_{i,j}$). Náklady, které se započítají do výsledné hodnoty účelové funkce, jsou z matice vybírány pomocí proměnné ($x_{i,j}$), která modeluje existenci přesunů použitých letadel mezi jednotlivými spoji.

Skupiny omezujících podmínek (4.3.2) – (4.3.4) mají analogické významy jako v předchozí variantě modelu.

Podmínka (4.3.5) zajišťuje, že minimální čas na provedení všech nutných úkonů na letišti (t_i^3) je 60 minut.

Soubor podmínek (4.3.6) a (4.3.7) zajišťuje, aby byly splněny požadavky cestovních kanceláří ohledně období, ve kterém má být spoj realizován. V případě, že by tato podmínka v modelu nebyla obsažena, mohlo by dojít k tomu, že spoje by mohly být realizovány mimo definované období. Podmínka funguje tak, že čas odletu spoje $i \in I$ (t_i^1) musí spadat do intervalu, který je vymezen začátkem (dz_i) a koncem (dk_i) období, kdy má být spoj $i \in I$ realizován.

Podmínka (4.3.8) zajišťuje, aby spoj $i \in I$ nemohl být znova zopakován.

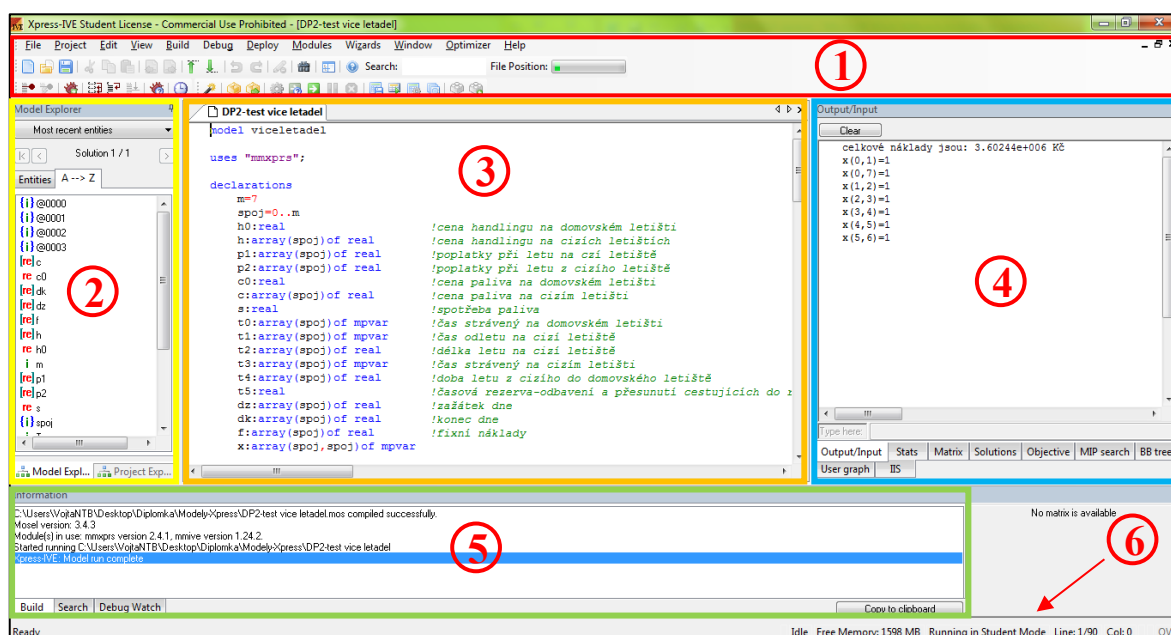
Skupiny omezujících podmínek (4.3.9), (4.3.10) a (4.3.11) reprezentují definiční obory jednotlivých proměnných použitých v modelu. Skupina podmínek (4.3.9) inicializuje bivalentní proměnnou proměnnou $x_{i,j}$. Ostatní podmínky (4.3.10) a (4.3.11) vyjadřují, že definičními obory proměnných t_i^1 a t_i^3 jsou množiny nezáporných čísel.

5 Transformace matematických modelů do jazyku MOSEL

5.1 Optimalizační software Xpress-IVE

Při řešení problémů spojených s matematickým modelováním je nutné mít k dispozici dostatečně výkonný výpočetní aparát. K jeho ovládání lze použít mnoha různých nástrojů. Mezi často používané patří např. simulační software Witness, který pracuje na principu diskrétní simulace. Dalším hojně využívaným nástrojem pro řešení optimalizačních úloh jsou software pracující na základě programovacího jazyka. Mezi takové programy patří například Delphi pracující s jazykem Object Pascal nebo Xpress-IVE využívající programovací jazyk Mosel.

Program Xpress-IVE je optimalizační software, speciálně vyvinutý pro řešení úloh matematického programování. Má velmi jednoduché uživatelské rozhraní a uživatel při jeho použití nepotřebuje mít takřka žádné větší znalosti a zkušenosti s programováním. Pracovní prostředí software je zobrazeno na obrázku č. 5.1.



Obr. č. 5.1 Pracovní prostředí software Xpress-IVE [16]

Pracovní prostředí programu Xpress-IVE lze rozdělit do pěti základních částí. V horní části pracovního okna je umístěna lišta obsahující širokou škálu různých funkcí (1). Některé jsou všeobecně známé, především z pracovního prostředí operačního systému Windows, jako např. *New file*, *Open file* nebo *Save file*. Pro samotnou práci s programem jsou však mnohem důležitější funkce *Compile* a *Run Model*. Funkce *Compile* slouží během psaní modelu k překladač textu programu a současně i ke kontrole syntaktických chyb. Jedná se o větné chyby vzniklé překlady nebo špatně nadefinovaným modelem, který se

pak neslučuje s fungováním programu. Pokud po aplikaci této funkce najde překladač v textu programu chybu, vyznačí daný řádek žlutým pruhem, tak jak je tomu vidět na obrázku č. 5.2 v poli pro zadávání textu modelu (3).

```

DP2-test více letadel
c0:real !cena paliva na domovském letišti
c:array(spoj)of real !cena paliva na cizím letišti
s:real !spotřeba paliva
t0:array(spoj)of mpvar !čas strávený na domovském letišti
t1:array(spoj)of mpvar !čas odletu na cizí letiště
t2:array(spoj)of real !délka letu na cizí letiště
t3:array(spoj)of mpvar !čas strávený na cizím letišti
t4:array(spoj)of real !doba letu z cizího do domovského letiště
t5:real !časová rezerva-odbavení a přesunutí cestujících do z
dz:array(spoj)of real !zažátek dne
dk:array(spoj)of real !konec dne
f:array(spkoj)of real !fixní náklady
x:array(spoj,spoj)of mpvar

end-declarations

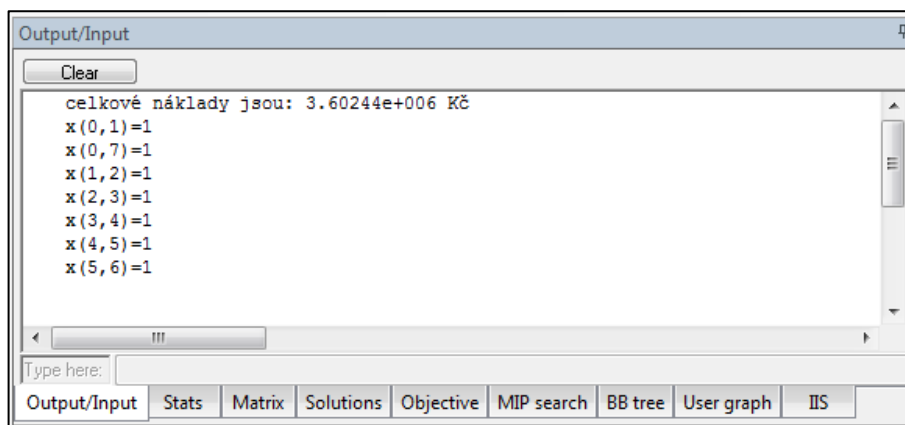
h0:=70000
h:=[0,80000,65000,90000,75000,85000,75000,80000]
p1:=[0,10000,15000,25000,17000,20000,15000,20000]
p2:=[0,12000,13000,27000,18000,18000,16000,22000]
c0:=17
c:=[19,20,18,16,17,19,21,20]
s:=53
t2:=[0,100,120,300,300,170,110,140]
t4:=[0,100,120,300,300,170,110,140]

```

Obr. č. 5.2 Okno pro zadávání textu programu v software Xpress-IVE [16]

Uživatel je na chybu upozorněn také v poli v dolní části obrazovky (5). Zde se vypíší všechna upozornění na syntaktické chyby, které byly při kontrole nalezeny. Chyba je identifikována pomocí uložště kontrolovaného souboru. Za ním je vypsáno číslo řádku a znaku v něm, kde se chyba nachází a nakonec samotný popis nalezené chyby. Pokud po opravě a opětovném stlačení tlačítka *Compile* program v poli č. 5 již nehlásí žádnou chybu, lze přistoupit k samotnému zahájení optimalizačního výpočtu. K zahájení optimalizačního výpočtu dochází pomocí tlačítka *Run Model* na liště funkcí.

Uprostřed pracovní plochy se vedle sebe nacházejí tři okna. V levém okně (2) se vypisují údaje o všech entitách vyskytujících se v modelu, po ukončení i hodnoty jednotlivých rozhodovacích proměnných [13]. Prostřední okno (3) slouží pro zápis textu programu. Z pohledu získaných dat po ukončení optimalizačního výpočtu je nejdůležitějším oknem okno na pravé straně pracovní plochy (4). V tomto okně si uživatel může zvolit z několika záložek, jak je vidět na obrázku č. 5.3, ze kterých může vyčíst takřka všechny potřebné informace o průběhu optimalizačního výpočtu.



Obr. č. 5.3 Informační okno s výslednými daty v software Xpress-IVE [16]

V záložce *Output/Input* se uživateli zobrazí pouze ty informace, které požaduje vypsat v příkazovém okně (3). Samotné řešení (hodnota účelové funkce), stavové hlášení o dosažení optimality a také informace o době trvání optimalizačního výpočtu se zobrazí na záložce s označením *Stats*. Výsledné hodnoty všech proměnných, které se v modelu vyskytly lze nalézt pod záložkou *Solutions*. Pod záložkou *MIP search* se skrývají grafy, které popisují časový průběh hledání optimálního řešení. Při volbě záložky *BB tree* se zobrazí strom řešení (jsou-li v modelu využívány celočíselné nezáporné nebo bivalentní proměnné). Další doplňkové informace se zobrazují na spodní liště pracovní plochy (6). Zde uživatel zjistí, jak velkou výpočetní paměť má program aktuálně k dispozici nebo aktuální polohu kurzoru v příkazovém okně.

5.2 Transformace lineárního modelu do jazyku MOSEL

Aby software Xpress-IVE vůbec mohl začít požadovaný model počítat, je nutné model transformovat do jazyku MOSEL. Model přepsaný do jazyka MOSEL v příkazovém okně lze rozdělit na několik částí, které model musí obsahovat. Mezi tyto části patří definice názvu modelu a definice použitých modulů, deklarační část, definice proměnných a konstant, soustava omezujících podmínek, účelová funkce, sdělení a ukončení modelu.

Nejprve se musí definovat název modelu a používané moduly, resp. knihovny řešících metod. Název modulu musí být napsán bez mezer a diakritiky.

model letovyrad2 – definice názvu programu

uses "mmxprs" – definice použitých modulů

Následuje deklarační část modelu, kterou je nutno nadepsat frází *declarations* a nakonec ukončit frází *end-declarations*. Prvním krokem je definování množin, se kterými se v textu programu bude pracovat a jejich rozsahů.

declarations – označení začátku deklarační části

m=16 – počet prvků množiny

spoj=0..m – deklarace množiny spojů I

V deklarační části matematického modelu dále dochází k popisu všech konstant a proměnných, které se v modelu vyskytují.

c:array(spoj)of real

n:array(spoj,spoj)of real

s:real

t1:array(spoj)of mpvar

x:array(spoj,spoj)of mpvar

end-declarations

Veličina c je konstantou typu pole (*array*) navázanou na množinu *spoj* a bude nabývat hodnot z množiny reálných čísel (*of real*). Analogicky je tomu i u veličiny n , která ovšem bude navázána na kombinaci dvou množin (*spoj, spoj*). Hodnota s je konstanta obsahující jedno reálné číslo.

Proměnné v zápisu v jazyce MOSEL mají ve svém označení koncovku *mpvar*. Veličina t^1 se transformací do jazyku MOSEL upravila na hodnotu $t1$, která je veličinou typu pole (*array*) a je navázána na množinu *spoj*. Stejně tak i proměnná x , která je navázána na kombinaci dvou množin (*spoj, spoj*).

Po definování všech konstant a proměnných se deklarační část ukončí vypsáním fráze *end – declarations*.

Dalším krokem pro sestavení funkčního textu programu v software Xpress-IVE pomocí jazyku MOSEL je vypsání hodnot všech konstant uvedených v deklarační části modelu.

c::[0,17,16,18,16,17,20,18,20,17,17,18,17,17,19,18,19]

s:=53

Konstanta c je typu pole a závisí na množině *spoj*. Nabývá hodnot uvedených v závorkách. Pro $spoj = 2$ pak $c(2) = 16$. Konstanta s je definována jedním číslem nabývajících reálných hodnot, a tím je číslo 53. U konstant typu pole, které jsou závislé na kombinaci 2 množin (*spoj, spoj*) se do příkazové části vpisuje matice, kde první množina označuje řádek a druhá množina sloupec, jak je tomu vidět na obrázku č. 6.2. Mezi takové konstanty patří právě konstanta n .

Po definici hodnot všech konstant přichází na řadu tvorba soustavy omezujících podmínek a účelové funkce. Této problematice se blíže věnují kapitoly týkající se konkrétních variant textů programů pro tvorbu letových řádů (*kap. 4.2 a 4.3*).

V závěru textu programu může uživatel požádat o výpis výsledků výpočtu, což je text, který se po dokončení výpočtu zobrazí v záložce *Output/Input* v okně č. 4.

writeln ("celkové náklady jsou: ",getobjval," Kč")

Požadavek na výpis vypočítaných hodnot je v jazyku MOSEL vyvolán frází *writeln*.

Zápis modelu v příkazovém okně je nutné zakončit frází *end – model*.

Pokud si uživatel chce do kterékoliv části textu programu vepsat jakoukoli poznámku, může použít symbolu "!", za který může vepsat jakýkoli text, aniž by ovlivnil běh textu optimalizačního výpočtu.

6 Výpočetní experimenty

Výpočetní experimenty byly realizovány za účelem ověření funkčnosti modelů. V předložené diplomové práci se jedná pouze o modelové příklady. Modely jednotlivých úloh nebudou v práci rozepisovány, neboť jejich strukturu lze dovodit z textů programů, které jsou v práci obsaženy. V rámci vybraných výpočetních experimentů bude dále testován vliv hodnoty prohibitivní konstanty obsažené v navržených modelech na dobu výpočtu, význam tohoto testování bude uveden dále v textu.

6.1 Test – varianta I

Pro tento vzorový příklad bylo vybráno sedm destinací, z toho tři záměrně v jeden den tak, aby nebyla možnost, že by všechny lety obsloužilo pouze jedno letadlo. Je tedy testováno, zda algoritmus použije k obsluze více letadel. V modelu je pouze jedno domovské letiště.

Náklady na handling na domovském letišti (h_o) jsou uvažovány ve výši 70 000 pj, náklady na handling na letištích v cílových destinacích (h_j) jsou popsány v tabulce č. 6.1.

destinace	0	1	2	3	4	5	6	7
$h_j(pj)$	70000	80000	65000	90000	75000	85000	75000	80000

Tab. č. 6.1 Vstupní data – náklady na handling

Předpokládané náklady na přeletové poplatky při letu do cílové destinace (p_j^1) a náklady na přeletové poplatky při letu z cílové destinace na domovské letiště (p_j^2) jsou uvedeny v tabulkách č. 6.2 a č. 6.3.

destinace (j)	0	1	2	3	4	5	6	7
$p_j^1(pj)$	0	10 000	15 000	25 000	17 000	20 000	15 000	20 000

Tab. č. 6.2 Vstupní data – náklady na přeletové poplatky při letu do cílové destinace

destinace (j)	0	1	2	3	4	5	6	7
$p_j^2(pj)$	0	12 000	13 000	27 000	18 000	18 000	16 000	22 000

Tab. č. 6.3 Vstupní data – náklady na přeletové poplatky při letu na domovské letiště

Předpokládaná cena za jeden litr paliva na domovském letišti je 17 peněžních jednotek. Předpokládané ceny za jeden litr paliva na letištích v cílových destinacích (c_j)

jsou uvedeny v tabulce č. 6. 4. Předpokládá se, že letadlo tankuje letecké pohonné hmoty před každým letem, tedy na každém letišti.

destinace (j)	1	2	3	4	5	6	7
$c_j(pj)$	20	18	16	17	19	21	20

Tab. č. 6.4 Vstupní data – cena za 1 litr paliva v cílové destinaci

Letadlo spotřebuje průměrně 53 litrů paliva za 1 minutu letu. Doby trvání letů do cílové destinace (t_j^2) a doby trvání letů zpět na domovské letiště (t_j^4) jsou uvedeny v tabulkách č. 6.5 a 6.6.

destinace (j)	0	1	2	3	4	5	6	7
t_j^2 (min)	0	100	120	300	300	170	110	140

Tab. č. 6.5 Vstupní data – doby trvání letů do cílových destinací

destinace (j)	0	1	2	3	4	5	6	7
t_j^4 (min)	0	100	120	300	300	170	110	140

Tab. č. 6.6 Vstupní data – doby trvání letů zpět na domovské letiště

Doby potřebné k odbavení cestujících na letišti cílové destinace a jejich přesun z letiště do resortu (t^5) jsou uvažovány jednotně pro všechny cílové destinace ve výši 90 minut.

Všechny časové údaje jsou uváděny v minutách a vyneseny na časovou osu, na které hodnota 0 představuje čas 00:00 v pondělí a hodnota 7 200 čas 24:00 v pátek téhož týdne. Čas odletu (t_i^1) musí být vždy z intervalu, který je zdola omezen začátkem (dz_i) dne a shora omezen jeho koncem (dk_i). Intervaly letů do jednotlivých destinací jsou vypsány v tabulce č. 6.7.

destinace (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
dz_i (min)	0	0	1440	2880	2880	2880	4320	5760
dk_i (min)	1440	1440	2800	4320	4320	4320	5760	7200

Tab. č. 6.7 Vstupní data – intervaly letů do cílových destinací

Při použití každého letadla je nutné do výpočtu započítat fixní náklady (f_i). Jedná se o náklady spojené s přípravou letadla k obsluze naplánované množiny destinací. Hodnoty fixních nákladů, je – li k obsluze spoje použito nové letadlo, jsou vypsány v tabulce č. 6.8.

destinace (j)	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_j(pj)$	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000	1 000

Tab. č. 6.8 Vstupní data – fixní náklady

V testovaném modelu prohibitivní konstanta nabývá hodnoty $T = 10^6$.

6.1.1 Zápis v programu Xpress-IVE

model viceletadel

uses "mmxprs";

declarations

m=7

spoj=0..m

h0:real

h:array(spoj)of real

p1:array(spoj)of real

p2:array(spoj)of real

c0:real

c:array(1..m)of real

s:real

t0:array(spoj)of mpvar

t1:array(spoj)of mpva

t2:array(spoj)of real

t3:array(spoj)of mpvar

t4:array(spoj)of real

t5:real

dz:array(spoj)of real

dk:array(spoj)of real

f:array(spoj)of real

x:array(spoj,spoj)of mpvar

end-declarations

h0:=70000

h::[0,80000,65000,90000,75000,85000,75000,80000]

p1::[0,10000,15000,25000,17000,20000,15000,20000]

p2::[0,12000,13000,27000,18000,18000,16000,22000]

c0:=17

c::[20,18,16,17,19,21,20]

s:=53

t2::[0,100,120,300,300,170,110,140]

t4::[0,100,120,300,300,170,110,140]

t5:=90

f::[10000,10000,10000,10000,10000,10000,10000]

dz::[0,0,1440,2880,2880,2880,4320,5760]

dk::[1440,1440,2880,4320,4320,4320,5760,7200]

T:=1000000

forall(i in 0..m,j in 1..m)x(i,j)is_binary

forall(j in 1..m)sum(i in 0..m)x(i,j)=1

forall(i in 1..m)sum(j in 1..m)x(i,j)<=1

forall(i in 1..m,j in 1..m)(t1(j)-(t1(i)+t2(i)+t3(i)+t4(i)+t0(j)))>=T*(x(i,j)-1)

forall(j in 1..m)t0(j)>=60

forall(i in 1..m)t3(i)>=60

forall(i in 0..m)dz(i)-(t5+t2(i))<=t1(i)

forall(i in 0..m)t1(i)<=dk(i)-(t5+t2(i))

forall(i in 0..m)t1(i)>=0

forall(i in 0..m)t3(i)>=0

naklady:=sum(i in 0..m, j in 1..m)

(x(i,j)*(h0+p1(j)+h(j)+p2(j)+t2(j)*c0*s+t4(j)*c(j)*s)) +sum(j in 1..m)f(j)*x(0,j)

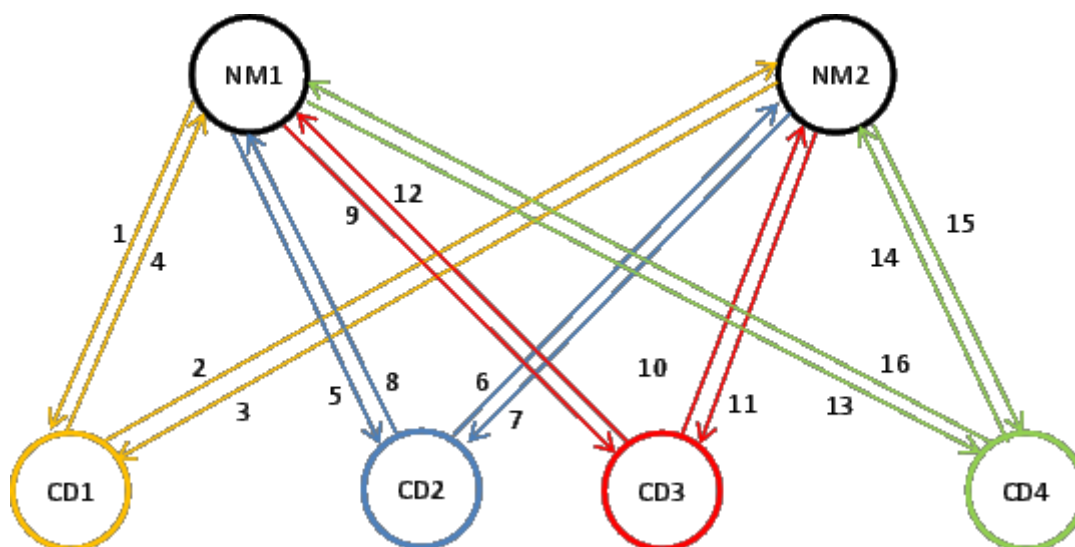
minimize(naklady)

```
writeln("celkové náklady jsou: ",getobjval," pj")
forall(i in 0..m-1,j in 1..m|getsol(x(i,j))>0)writeln("x(",i," ",j,")=",getsol(x(i,j)))
```

```
end-model
```

6.2 Test – varianta I

V této testovací úloze jsou obsažena 2 nástupní místa (NM1, NM2) a 4 cílové destinace (CD1 – CD4). Pro obsluhu všech destinací v plném rozsahu je třeba vypravit 16 spojů, jak je patrné z obrázku č. 6.1.



Obr. č. 6.1 Obsluha systémem W

Na obrázku č. 6.1 je grafické znázornění všech možných spojů. Každému spoji je přiděleno pořadové číslo. Ohodnocení hran reprezentuje čísla spojů. Obsluhy jednotlivých cílových destinací pomocí systému W jsou od sebe barevně odlišeny. Definovaná množina spojů má být obslužena v rámci tří po sobě jdoucích dnů. Vstupní hodnoty v zadání jsou záměrně nastaveny tak, aby se prověřila funkčnost nasazení více letadel k obsluze naplánované množiny spojů.

V modelu jsou definovány náklady na handling (h_i) prováděný před uskutečněním každého spoje. Jejich hodnoty jsou vypsány v následující tabulce č. 6.9.

spoj (i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
h_i (tis. pj)	100	70	50	60	50	70	60	60	60	70	55	60	55	70	45	60	45

Tab. č. 6.9 Vstupní data – náklady na handling

Dále jsou známy náklady na přeletové poplatky (p_i) při realizaci spoje (i), jejichž hodnoty jsou v tabulce č. 6.10.

spoj (i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
p_i (tis. pj)	0	15	12	12	15	30	27	27	30	18	17	17	18	25	22	22	25

Tab. č. 6.10 Vstupní data – přeletové poplatky

Je uvažováno, že letadlo spotřebuje za jednu minutu letu průměrně 53 litrů leteckých pohonných hmot. Doplnování leteckých pohonných hmot probíhá před každým letem, resp. před obsluhou každého naplánovaného spoje. Ceny jednoho litru leteckých pohonných hmot (c_i) potřebných pro absolvování spoje $i \in I$ jsou uvedeny v tabulce č. 6.11.

spoj (i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
c_i (pj/l)	0	17	16	18	16	17	20	18	20	17	17	18	17	17	19	18	19

Tab. č. 6.11 Vstupní data – cena 1 litru paliva

Všechny časy jsou uváděny v minutách a vyneseny na časovou osu. Čas odletu (t_i^1) musí být vždy z intervalu, který je zdola omezen začátkem (dz_i) dne a shora omezen jeho koncem (dk_i). Intervaly letů do jednotlivých destinací jsou vypsány v tabulkách č. 6.12 a 6.13.

spoj (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
dz_i (min)	0	0	0	0	0	1 440	1 440	1 440
dk_i (min)	1 440	1 440	1 440	1 440	1 440	2 880	2 880	2 880

Tab. č. 6.12 Vstupní data – intervaly letů do cílových destinací I

spoj (i)	8	9	10	11	12	13	14	15	16
dz_i (min)	1 440	1 440	1 440	1 440	1 440	2 880	2 880	2 880	2 880
dk_i (min)	2 880	2 880	2 880	2 880	2 880	4 320	4 320	4 320	4 320

Tab. č. 6.13 Vstupní data – intervaly letů do cílových destinací II

Doby trvání letů jednotlivých spojů (t_i^2) jsou uvedeny v tabulkách č. 6.14 a 6.15.

spoj (<i>i</i>)	0	1	2	3	4	5	6	7
t_i^2 (min)	0	120	110	110	120	270	250	250

Tab. č. 6.14 Vstupní data – doby trvání letů I

spoj (<i>i</i>)	8	9	10	11	12	13	14	15	16
t_i^2 (min)	270	150	150	150	150	180	170	170	180

Tab. č. 6.15 Vstupní data – doby trvání letů II

Náklady na přesuny mezi jednotlivými spoji ($n_{i,j}$) jsou uvedeny v tabulce č. 6.16.

$n_{i,j}$ (<i>pj</i>)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	100	10	5000	500	5000	10	9000	500	9000	10	6000	500	6000	10	7000	500	7000
1	5100	5000	10	4500	10	5000	3000	4500	3000	5000	6000	4500	6000	5000	9000	4500	9000
2	500	500	4500	10	4500	500	8500	10	8500	500	5500	10	5500	500	6500	10	6500
3	5000	5000	10	4500	10	5000	3000	4500	3000	5000	6000	4500	6000	5000	9000	4500	9000
4	100	10	5000	500	5000	10	9000	500	9000	10	6000	500	9000	10	7000	500	7000
5	T	T	T	T	T	9000	10	8500	10	9000	3000	8500	3000	9000	6000	8500	6000
6	T	T	T	T	T	500	8500	10	8500	500	5500	10	5500	500	6500	10	6500
7	T	T	T	T	T	9000	10	8500	10	9000	3000	8500	3000	9000	6000	8500	6000
8	T	T	T	T	T	10	9000	500	9000	10	6000	500	6000	10	7000	500	7000
9	T	T	T	T	T	6000	3000	5500	3000	6000	10	5500	10	6000	3000	5500	3000
10	T	T	T	T	T	500	8500	10	8500	500	5500	10	5500	500	6500	10	6500
11	T	T	T	T	T	6000	3000	5500	3000	6000	10	5500	10	6000	3000	5500	3000
12	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	10	7000	500	7000
13	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	7000	10	6500	10
14	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	500	6500	10	6500
15	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	7000	10	6500	10
16	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	10	7000	500	7000

Tab. č. 6.16 Vstupní data – náklady na přesuny mezi spoji

Fixní náklady, které se započítají při použití dalšího letadla, jsou vypsány v tabulce č 6.17.

spoj (j)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
f_j (tis. p_j)	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Tab. č. 6.17 Vstupní data – fixní náklady

V testovaném modelu prohibitivní konstanta nabývá hodnoty $T = 10^6$.

6.2.1 Zápis v programu Xpress-IVE

model letovyrad2

uses "mmxprs";

declarations

m=16

spoj=0..m

t1:array(spoj)of mpvar

t2:array(spoj)of real

t3:array(spoj)of mpvar

dz:array(spoj)of real

dk:array(spoj)of real

h:array(spoj)of real

p:array(spoj)of real

c:array(spoj)of real

n:array(spoj,spoj)of real

s:real

f:array(spoj)of real

x:array(spoj,spoj)of mpvar

end-declarations

T:=100000000000

t2::[0,120,110,110,120,270,250,250,270,150,150,150,150,180,170,170,180]

dz: [0,0,0,0,1440,1440,1440,1440,1440,1440,1440,1440,2880,2880,2880,2880]
 dk: [1440,1440,1440,1440,1440,2880,2880,2880,2880,2880,2880,2880,2880,4320,4320,4320]
 h: [100000,70000,50000,60000,50000,70000,60000,60000,60000,70000,55000,60000,55000,70000,45000,60000,45000]
 p: [0,15000,12000,12000,15000,30000,27000,27000,30000,18000,17000,17000,18000,25000,22000,22000,25000]
 c: [0,17,16,18,16,17,20,18,20,17,17,18,17,17,19,18,19]
 f: [30000,30000,30000,30000,30000,30000,30000,30000,30000,30000,30000,30000,30000,30000,30000,30000,30000]
 n: [100,10,5000,500,5000,10,9000,500,9000,10,6000,500,6000,10,7000,500,7000,5100,5000,10,4500,10,5000,3000,4500,3000,5000,6000,4500,6000,5000,9000,4500,9000,500,500,4500,10,4500,500,8500,10,8500,500,5500,10,5500,500,6500,10,6500,5000,5000,10,4500,10,5000,3000,4500,3000,5000,6000,4500,6000,5000,9000,4500,9000,100,10,5000,500,5000,10,9000,500,9000,10,6000,500,9000,10,7000,500,7000,T,T,T,T,T,9000,10,8500,10,9000,3000,8500,3000,9000,6000,8500,6000,T,T,T,T,T,500,8500,10,8500,500,5500,10,5500,500,6500,10,6500,T,T,T,T,T,9000,10,8500,10,9000,3000,8500,3000,9000,6000,8500,6000,T,T,T,T,T,10,9000,500,9000,10,6000,500,6000,10,7000,500,7000,T,T,T,T,T,6000,3000,5500,3000,6000,10,5500,10,6000,3000,5500,3000,T,T,T,T,T,500,8500,10,8500,500,5500,10,5500,500,6500,10,6500,T,T,T,T,T,6000,3000,5500,3000,6000,10,5500,10,6000,3000,5500,3000,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,10,7000,500,7000,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,7000,10,6500,10,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,500,6500,10,6500,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,7000,10,6500,10,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,10,7000,500,7000]
 s:=53

forall(i in 0..m,j in 1..m)x(i,j)is_binary
 forall(i in 1..m)x(i,i)=0

```

forall(j in 1..m)sum(i in 0..m)x(i,j)=1
forall(i in 1..m)sum(j in 1..m)x(i,j)<=1
forall(i in 0..m,j in 1..m)(t1(j)-(t1(i)+t2(i)+t3(i))>=T*(x(i,j)-1))
forall(i in 0..m)dz(i)<=t1(i)
forall(i in 0..m)t1(i)<=dk(i)
forall(i in 0..m)t3(i)>=60

naklady:=sum(j in 1..m)(f(j)*x(0,j))+sum(i in 1..m)((t2(i)*s*c(i))+p(i)+h(i))+sum(i in
0..m,j in 1..m)(n(i,j)*x(i,j))
minimize(naklady)
writeln("Celkové náklady jsou: ",getobjval," pj")
forall(i in 0..m,j in 1..m|getsol(x(i,j))>0)writeln("x(",i,",",j,")=",getsol(x(i,j)))

end-model

```

6.3 Testování závislosti hodnoty prohibitivní konstanty T na hodnotě výpočetního času ve variantě II

Prohibitivní konstanta, v modelu označovaná velkým písmenem T , je pomocná hodnota, která se v odůvodněných případech účelově používá (zablokování některé z variant, vytvoření převodního vztahu mezi veličinami s různými definičními obory v podmínkách zajišťujících logické vazby). Velikost hodnoty této konstanty v podstatě závisí na řešiteli, nicméně existují určitá omezení, pro která nelze její hodnotu volit zcela libovolně. Hodnota prohibitivní konstanty musí být zvolena tak, aby v kombinaci s hodnotami jiných konstant zajišťovala pouze svůj původní účel a negativně neovlivňovala množinu přípustných řešení úlohy. Prohibitivní konstanta může být také užitečná při interpretaci výsledků. V některých modelech totiž mohou být v hodnotě účelové funkce zahrnuty dvě veličiny s nekonzistentními jednotkami (tyto situace se vyskytují v případě multikriteriální optimalizace). Když při použití konstanty T bude v účelové funkci výsledná hodnota jedné veličiny např. v řádech milionů a výsledná hodnota druhé veličiny v řádu desítek, budou hodnoty jednotlivých veličin při závěrečné interpretaci lehce odlišitelné.

V případě navržených modelů byla prohibitivní konstanta zařazena z důvodu prvního účelu – eliminace některých hodnot proměnných.

Ke zjišťování hodnoty výpočetního času v závislosti na hodnotě prohibitivní konstanty T bylo přistoupeno z prostého důvodu. Při prvním provedeném experimentu bylo zjištěno, že doba výpočtu činila 1 271 s. Při tomto experimentu se prohibitivní konstanta T v modelu vyskytovala pouze v podmínce (4.3.4) a její hodnota byla zvolena ve výši $T = 10^6$. Doba výpočtu vzhledem k rozsahu vstupních dat signalizovala určitou neefektivitu výpočetního procesu. Bylo zřejmé, že pro potřeby výpočtu modelů odpovídajících úlohám reálného rozsahu bude nutno model upravit, aby došlo k větší efektivitě – zrychlení výpočtu. Aby se zrychlil výpočet, byla v matici nákladů na přesun ze spoje $i \in I$ do spoje $j \in I$ doplněna prohibitivní konstanta. A to tak, že náklady na přesuny mezi spoji, které nelze uskutečnit z časových důvodů, byly nahrazeny prohibitivní konstantou T . Např. po obsluze spoje letícího v určitý den nelze obsloužit spoj, který již např. letěl v předchozím dni, viz obrázek č. 6.2.

n::	[100,10,5000,500,5000,10,9000,500,9000,10,6000,500,6000,10,7000,500,7000,	!0
	5100,5000,10,4500,10,5000,3000,4500,3000,5000,6000,4500,6000,5000,9000,4500,9000,	!1
	500,500,4500,10,4500,500,8500,10,8500,500,5500,10,5500,500,6500,10,6500,	!2
	5000,5000,10,4500,10,5000,3000,4500,3000,5000,6000,4500,6000,5000,9000,4500,9000,	!3
	100,10,5000,500,5000,10,9000,500,9000,10,6000,500,9000,10,7000,500,7000,	!4
	T,T,T,T,T,9000,10,8500,10,9000,3000,8500,3000,9000,6000,8500,6000,	!5
	T,T,T,T,T,500,8500,10,8500,500,5500,10,5500,500,6500,10,6500,	!6
	T,T,T,T,T,9000,10,8500,10,9000,3000,8500,3000,9000,6000,8500,6000,	!7
	T,T,T,T,T,10,9000,500,9000,10,6000,500,6000,10,7000,500,7000,	!8
	T,T,T,T,T,6000,3000,5500,3000,6000,10,5500,10,6000,3000,5500,3000,	!9
	T,T,T,T,T,500,8500,10,8500,500,5500,10,5500,500,6500,10,6500,	!10
	T,T,T,T,T,6000,3000,5500,3000,6000,10,5500,10,6000,3000,5500,3000,	!11
	T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,10,7000,500,7000,	!12
	T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,7000,10,6500,10,	!13
	T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,500,6500,10,6500,	!14
	T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,7000,10,6500,10,	!15
	T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,T,10,7000,500,7000]	!16

Obr. č. 6.2 Matice nákladů na přesuny mezi spoji [16]

Na obrázku č. 6.2 je vidět matice nákladů na přesun ze spoje $i \in I$ do spoje $j \in I$ již po úpravě. Zelené číslice na pravé straně matice označují řádky matice pro snadnější orientaci. Další úpravou v modelu bylo přímé zakázání toho, aby byly vytvořeny vazby typu $x_{i,i}$. Jedná se o podmínku (4.3.8). Bez této podmínky algoritmus při hodnotě $T = 10^9$ vykazoval časově nepřijatelné řešení.

Po zapracování úprav popsaných v prvním odstavci do modelu bylo testování provedeno opakovaně. Testovaly se hodnoty prohibitivní konstanty od $T = 10^4$ až po hodnoty $T = 10^{18}$. Každá hodnota byla testována třikrát po sobě a z každého testu byla vypočtena průměrná hodnota výpočetního času. Jako první byla zvolena hodnota $T = 10^4$, protože je to nejnižší hodnota, kdy je prohibitivní konstanta řádově srovnatelná

s ostatními konstantami. Po dokončení prvního testu se ukázalo, že i přes všechny úpravy v modelu hodnota prohibitivní konstanty $T = 10^4$ je příliš malá, protože výpočetní čas byl stále velký jak je vidět v tabulce č. 6.18.

$T = 10^4$	1	2	3	průměrná hodnota
výpočetní čas (s)	374,6	362,9	421,7	386,4

Tab. č. 6.18 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^4$

Při zvýšení hodnoty prohibitivní konstanty na $T = 10^5$ došlo ke snížení výpočetního času. Jak je patrné z tabulky č. 6.19, došlo ve srovnání s průměrnou hodnotou při původní hodnotě prohibitivní konstanty ke snížení průměrné hodnoty doby výpočtu o 382,1 s.

$T = 10^5$	1	2	3	průměrná hodnota
výpočetní čas (s)	4,4	4,0	4,6	4,3

Tab. č. 6.19 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^5$

Jak je vidět z přiložených tabulek č 6.19 – 6.31, tak průměrná hodnota výpočetního času se dále pohybovala v rozmezí 3,7 až 4,5 sekund.

$T = 10^6$	1	2	3	průměrná hodnota
výpočetní čas (s)	4,1	3,7	4,3	4,0

Tab. č. 6.20 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^6$

$T = 10^7$	1	2	3	průměrná hodnota
výpočetní čas (s)	5,2	4,1	4,2	4,5

Tab. č. 6.21 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^7$

$T = 10^8$	1	2	3	průměrná hodnota
výpočetní čas (s)	4,5	4,0	3,6	4,0

Tab. č. 6.22 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^8$

$T = 10^9$	1	2	3	průměrná hodnota
výpočetní čas (s)	3,8	4,1	3,8	3,9

Tab. č. 6.23 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^9$

$T = 10^{10}$	1	2	3	průměrná hodnota
výpočetní čas (s)	3,7	3,6	3,8	3,7

Tab. č. 6.24 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{10}$

$T = 10^{11}$	1	2	3	průměrná hodnota
výpočetní čas (s)	3,6	4,2	3,9	3,9

Tab. č. 6.25 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{11}$

$T = 10^{12}$	1	2	3	průměrná hodnota
výpočetní čas (s)	4,1	3,8	3,8	3,9

Tab. č. 6.26 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{12}$

$T = 10^{13}$	1	2	3	průměrná hodnota
výpočetní čas (s)	4,0	3,7	3,8	3,9

Tab. č. 6.27 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{13}$

$T = 10^{14}$	1	2	3	průměrná hodnota
výpočetní čas (s)	4,4	4,0	3,9	4,1

Tab. č. 6.28 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{14}$

$T = 10^{15}$	1	2	3	průměrná hodnota
výpočetní čas (s)	4,0	3,9	3,7	3,9

Tab. č. 6.29 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{15}$

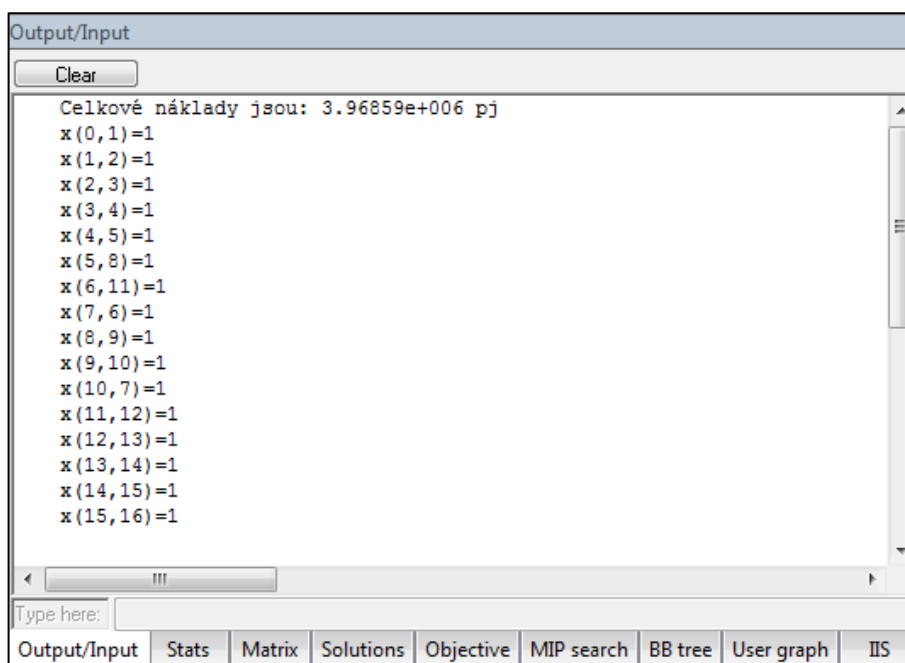
$T = 10^{16}$	1	2	3	průměrná hodnota
výpočetní čas (s)	4,6	3,7	4,8	4,0

Tab. č. 6.30 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{16}$

$T = 10^{17}$	1	2	3	průměrná hodnota
výpočetní čas (s)	4,5	4,9	4,1	4,5

Tab. č. 6.31 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{17}$

Experimenty byly zastaveny po otestování hodnoty $T = 10^{18}$ a několika následujících. Ukázalo se totiž, že dosažené výsledky nesplňují podmínky přípustnosti. Na rozdíl od všech předchozích experimentů byl výpočetní čas roven hodnotě 0, změnila se také hodnota účelové funkce. Z původních $3,99859 \cdot 10^6$ pj na $3,96859 \cdot 10^6$ pj jak je vidět na obrázku č. 6.3.



Obr. č. 6.3 Hodnota účelové funkce a návaznost spojů při $T = 10^{18}$ [16]

Fakt, že řešení není přípustné, lze snadno poznat po otevření záložky Solution v programu Xpress-IVE na obrázku č. 6.4.

Solutions

View last N solutions found by the Optimizer

	Column	Name	Obj=3.96859...
~	0	t1(0)	0
~	1	t1(1)	32
~	2	t1(2)	160
~	3	t1(3)	288
~	4	t1(4)	416
~	5	t1(5)	1440
~	6	t1(6)	2464
~	7	t1(7)	2208
~	8	t1(8)	1696
~	9	t1(9)	1952
~	10	t1(10)	2080
~	11	t1(11)	2720
~	12	t1(12)	2848
~	13	t1(13)	2976
~	14	t1(14)	3104
~	15	t1(15)	4192
~	16	t1(16)	4320

Output/Input Stats Matrix Solutions Objective MIP search BB tree User graph IIS

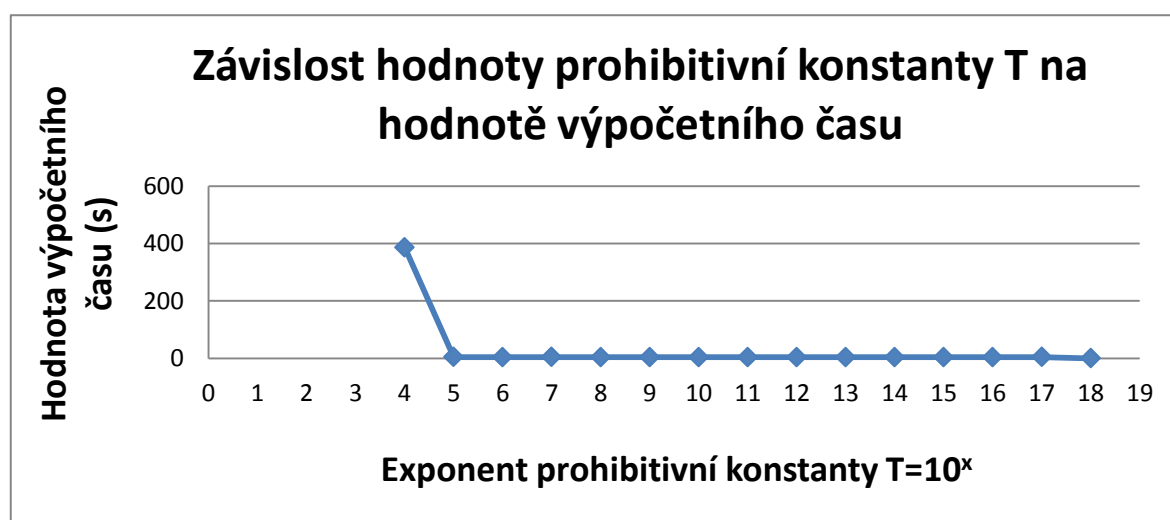
Obr. č. 6.4 Časy odletů spojů při $T = 10^{18}$ [16]

V druhém řádku u proměnné t_1^1 je výsledná hodnota odletu spoje v čase $t_1^1 = 32$. To je však nemožné, protože letadlo musí před letem strávit na letišti minimálně 60 minut, tak jak to nařizuje podmínka (4.3.5). Aby byla podmínka splněna, mohlo by letadlo odletět nejdříve v čase $t_1^1 = 60$. Zajímavé je, že i přesto, že je jasné, že řešení není přípustné, program deklaruje optimalitu řešení, jak je tomu vidět na obrázku č. 6.5.

Stats			
Matrix:		Presolved:	
Rows(constraints):	304	Rows(constraints):	204
Columns(variables):	306	Columns(variables):	185
Nonzero elements:	1584	Nonzero elements:	799
Global entities:	272	Global entities:	169
Sets:	0	Sets:	0
Set members:	0	Set members:	0
Overall status: Finished global search.			
LP relaxation:		Global search:	
Algorithm:	Simplex dual	Current node:	1
Simplex iterations:	66	Depth:	1
Objective:	3.96859e+006	Active nodes:	0
Status:	Unfinished	Best bound:	3.96859e+006
Time:	0.0s	Best solution:	3.96859e+006
		Gap:	0%
		Status:	Solution is optimal.
		Time:	0.0s
Output/Input Stats Matrix Solutions Objective MIP search BB tree User graph IIS			

Obr. č. 6.5 Statistické údaje o výpočtu při $T = 10^{18}$ [16]

V grafu na obrázku č. 6.6 je zaznamenán vývoj změny hodnoty výpočetního času v závislosti na změně hodnoty prohibitivní konstanty. V grafu jsou uvedeny průměrné hodnoty z tabulek č. 6.18 – 6.31.



Obr. č. 6.6 Graf závislosti prohibitivní konstanty T na hodnotě výpočetního času

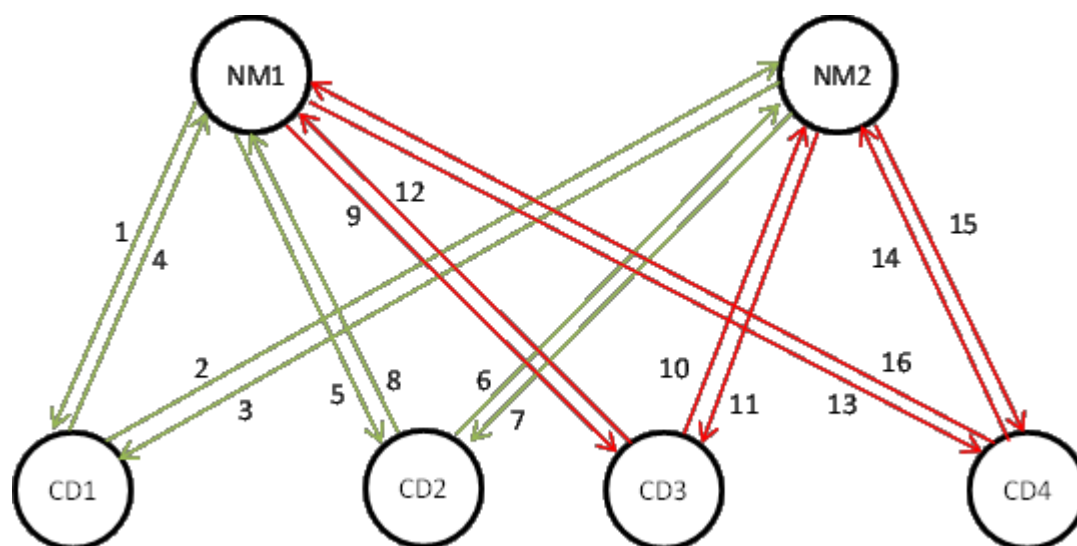
Během testování byla nejnižší naměřená hodnota 3,6 sekund. Naopak nejvyšší naměřená hodnota byla 421,7 sekund

Během testů bylo také zjištěno, že změna prohibitivní konstanty nemá vliv pouze na hodnotu výpočetního času, ale také na návaznost jednotlivých spojů.

Z obrázků č. 6.7 a 6.8 je patrné, že řešení je optimální a je vidět pořadí v jakém jsou jednotlivé spoje obsluhovány, když hodnota prohibitivní konstanty činí $T = 10^4$.

Stats			
Matrix:		Presolved:	
Rows(constraints):	304	Rows(constraints):	176
Columns(variables):	306	Columns(variables):	192
Nonzero elements:	1584	Nonzero elements:	768
Global entities:	272	Global entities:	176
Sets:	0	Sets:	0
Set members:	0	Set members:	0
Overall status: Finished global search.			
LP relaxation:		Global search:	
Algorithm:	Simplex dual	Current node:	83992
Simplex iterations:	71	Depth:	27
Objective:	3.94858e+006	Active nodes:	0
Status:	Unfinished	Best bound:	3.9982e+006
Time:	0.0s	Best solution:	3.99859e+006
		Gap:	0.00970797%
		Status:	Solution is optimal.
		Time:	418.6s
Output/Input Stats Matrix Solutions Objective MIP search BB tree User graph IIS			

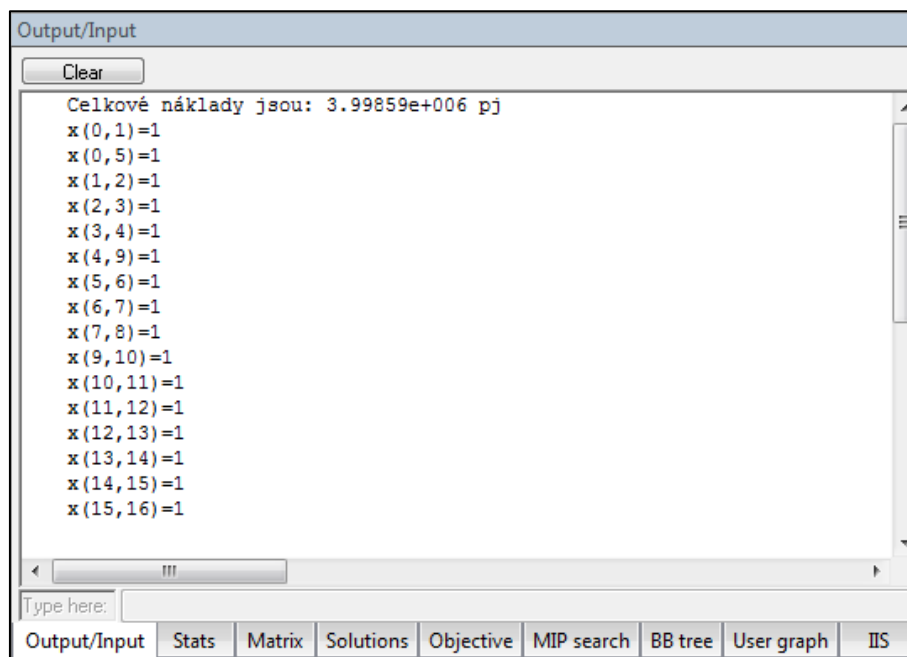
Obr. č. 6.7 Statistické údaje o výpočtu při $T = 10^4$ [16]



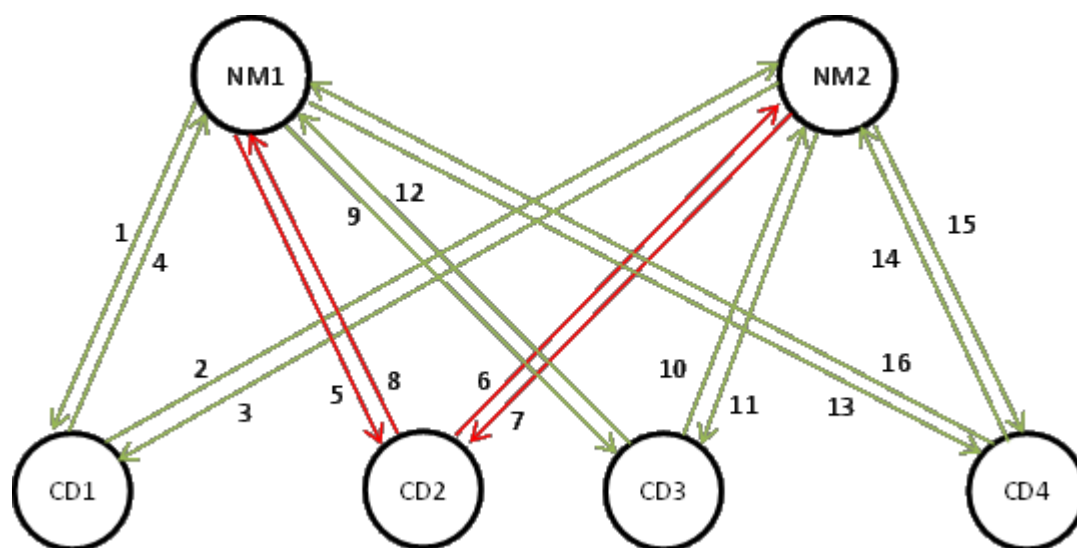
Obr. č. 6.8 Rozdělení obsluhy spojů při $T = 10^4$

První letadlo obsluhuje všechny spoje označené červenou barvou v pořadí 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8. Druhé letadlo obsluhuje spoje v pořadí 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16.

V testech, kde byly hodnoty výpočetních časů nejnižší, tzn. při testech, kdy byla hodnota prohibitivní konstanty nastavena na zvolených hodnotách z intervalu $T = 10^5$ až $T = 10^{16}$, byla návaznost spojů ve všech testech stejná.



Obr. č. 6.9 Hodnota účelové funkce a návaznost spojů při $T = 10^5$ až $T = 10^{16}$ [16]

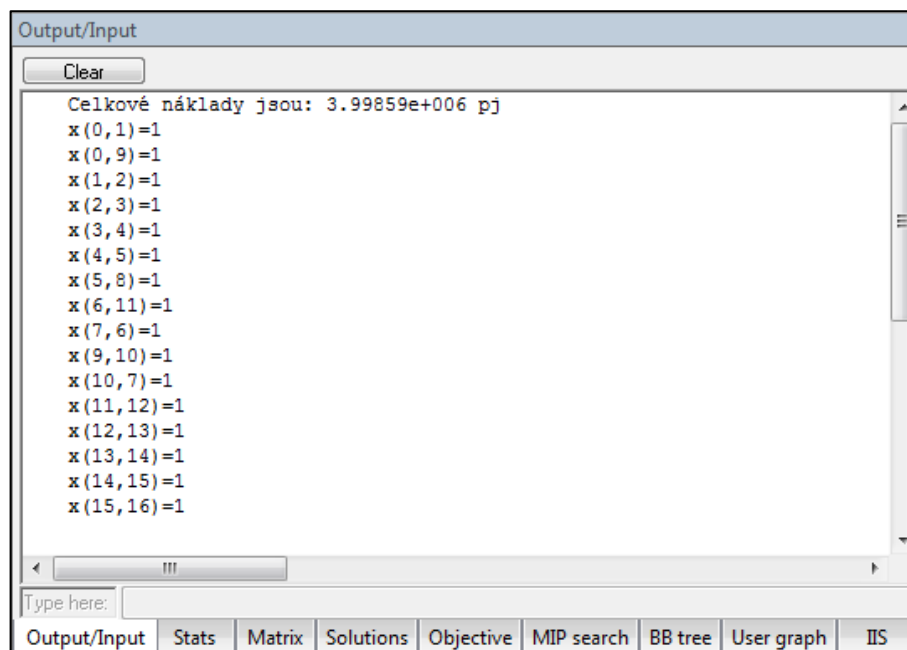


Obr. č. 6.10 Rozdělení obsluhy spojů při $T = 10^5$ až $T = 10^{16}$

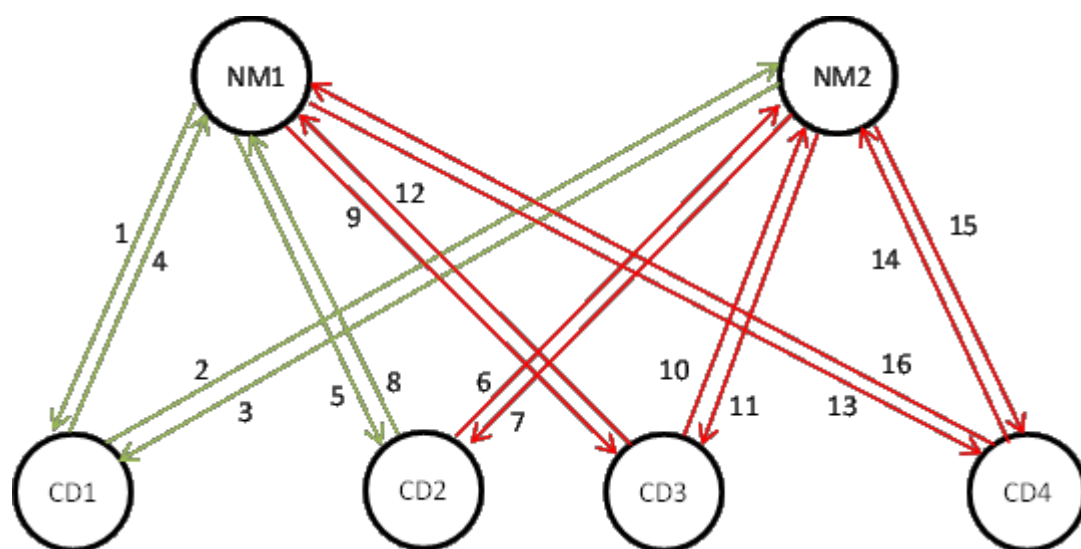
Z obrázků č. 6.9 a 6.10 je zřejmé, došlo ke snížení vytížení 2. letadla, které teď obsluhuje pouze 4 spoje. První letadlo bude podle výsledků obsluhovat spoje v pořadí 1 – 2 – 3 – 4 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15, druhé letadlo spoje v pořadí 5 – 6 – 7 – 8.

Od obou dvou výše uvedených řešení se odlišuje uspořádání návaznosti spojů při hodnotě prohibitivní konstanty $T = 10^{17}$.

V situaci, kdy hodnota prohibitivní konstanty je $T = 10^{17}$ je uspořádání návaznosti spojů následující. První letadlo obsluží spoje v pořadí 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 8. Druhé letadlo obsluží spoje v pořadí 9 – 10 – 7 – 6 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16. Výpis návaznosti spojů a grafické znázornění obslužení spojů je zobrazeno na obrázcích č. 6.11 a 6.12.



Obr. č. 6.11 Hodnota účelové funkce a návaznost spojů při $T = 10^{17}$ [16]

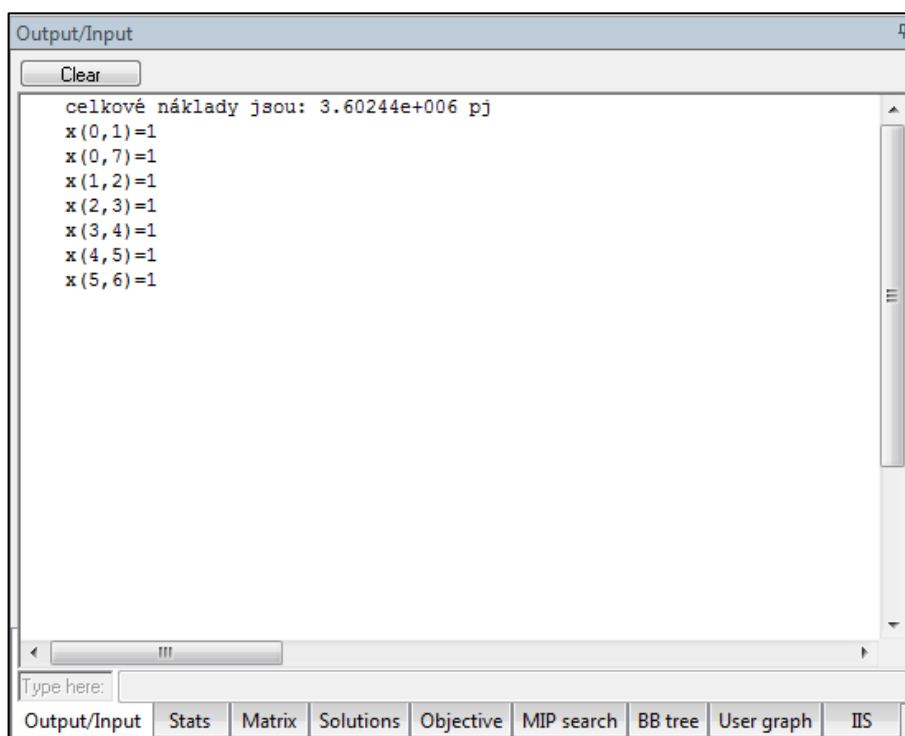


Obr. č. 6.12 Rozdělení obsluhy spojů při $T = 10^{17}$

7 Vyhodnocení získaných řešení

7.1 Interpretace výsledků testu varianty I

V následujícím textu budou vyhodnoceny výsledky testu varianty I. Výstup z modelu řešeného v programu Xpress-IVE je zobrazen na obrázku č. 7.1.



Obr. č. 7.1 Hodnota účelové funkce a návaznost letů při testu varianty I [16]

V tomto okně se zobrazí všechny informace, u kterých jsou požadavky na jejich výpisy uvedeny v textu programu. V případě, že by řešitel v textu programu výpisy nepožadoval, okno zůstane prázdné. Algoritmus vypočítal, že celkové náklady na obsluhu naplánované množiny spojů jsou $3,60244 \cdot 10^6$ pj. Dále jsou zde vypsány proměnné $x_{i,j}$, které nabývají hodnoty 1. Jinými slovy, jsou zde vypsány návaznosti letů do destinací, které se uskutečnily. Ve výpisu se dvakrát vyskytuje proměnná ve tvaru $x_{0,j}$. To znamená, že k obsluze naplánované množiny spojů byla skutečně použita dvě letadla tak, jak bylo v zadání úlohy požadováno. První letadlo obsloužilo destinace 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6. K obsluze destinace 7 bylo zapotřebí využití dalšího letadla.

Obrázek č. 7.2 ukazuje kartu statistických údajů v programu Xpress-IVE. Červená elipsa ukazuje, že nalezené řešení je optimální. Z této tabulky lze také vyčíst, že program zadanou úlohu řešil velmi rychle, protože hodnota výpočetního času je rovna 0. Hodnota výpočetního času je zvýrazněna zelenou elipsou.

Stats			
Matrix:		Presolved:	
Rows(constraints):	62	Rows(constraints):	15
Columns(variables):	71	Columns(variables):	25
Nonzero elements:	324	Nonzero elements:	57
Global entities:	49	Global entities:	22
Sets:	0	Sets:	0
Set members:	0	Set members:	0
Overall status: Finished global search.			
LP relaxation:		Global search:	
Algorithm:	Simplex dual	Current node:	1
Simplex iterations:	14	Depth:	1
Objective:	3.60244e+006	Active nodes:	0
Status:	Unfinished	Best bound:	3.60244e+006
Time:	0.0s	Best solution:	3.60244e+006
		Gap:	0%
		Status:	Solution is optimal
		Time:	0.0s
Time overheads:			
Progress graphs:	0.0s		
Writing output:	0.0s		
Pausing:	0.0s		
Updating status:	0.0s		
Output/Input	Stats	Matrix	Solutions
Objective	MIP search	BB tree	User graph
IIS			

Obr. č. 7.2 Statistické údaje o výpočtu při testu varianty I [16]

V záložce Solution jsou vypsány všechny proměnné, které byly pro řešení zavedeny a jejich výsledné hodnoty.

Solutions				
View last N solutions found by the Optimizer				
	Column	Name	Obj=3.60244...	
~	0	t0(1)	60	
~	1	t0(2)	60	
~	2	t0(3)	60	
~	3	t0(4)	60	
~	4	t0(5)	60	
~	5	t0(6)	60	
~	6	t0(7)	60	
~	7	t1(0)	0	
~	8	t1(1)	910	
~	9	t1(2)	1230	
~	10	t1(3)	2490	
~	11	t1(4)	3210	
~	12	t1(5)	4060	
~	13	t1(6)	4650	
~	14	t1(7)	5530	
~	15	t3(1)	60	
~	16	t3(2)	60	
~	17	t3(3)	60	
~	18	t3(4)	60	
~	19	t3(5)	60	
Output/Input	Stats	Matrix	Solutions	Objective
MIP search	BB tree	User graph	IIS	

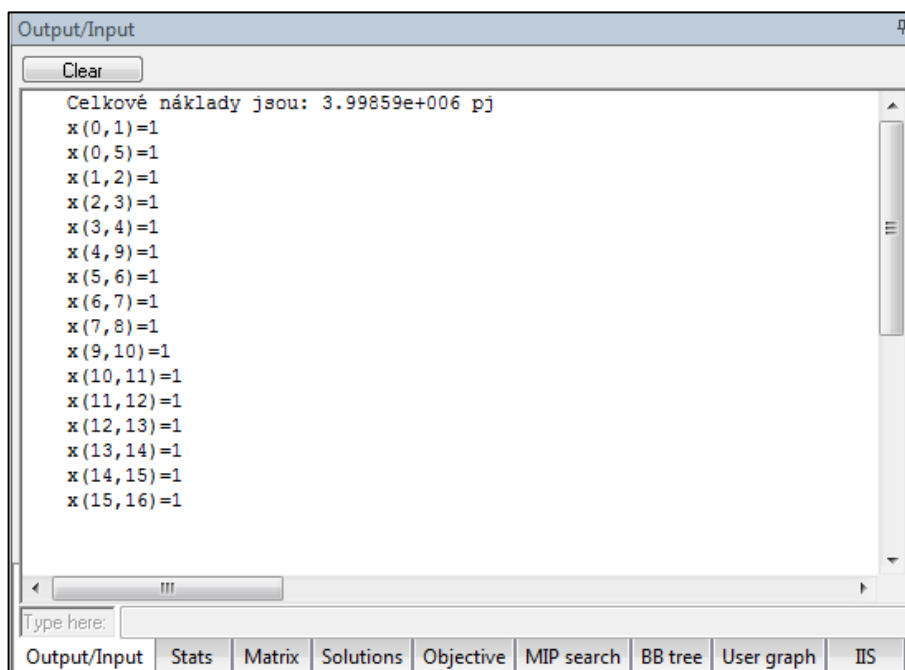
Obr. č. 7.3 Výsledné hodnoty proměnných t_j^0, t_i^1, t_i^3 při testu varianty I [16]

V modelu je použito celkem 70 proměnných. Není zdaleka nutné zde všechny vypisovat. Na obrázku č. 7. 3 je uveden pouze fragment záložky. Proměnné t_j^0 modelující

dobu strávenou na domovském letišti před letem do cílové destinace $j \in I$ a t_i^3 modelující dobu strávenou v cílové destinaci $i \in I$, nabývají vždy hodnoty 60. Je to z toho důvodu, že algoritmus se snaží hodnotu účelové funkce minimalizovat, ale podmínky (4.2.5) a (4.2.6) dovolují hodnotu proměnné snížit nejnižší právě na hodnotu 60. Dále jsou na obrázku vidět hodnoty proměnných t_i^1 , které reprezentují časy odletů spojů do jednotlivých cílových destinací. Největší skupinou proměnných jsou proměnné $x_{i,j}$ modelující návaznost letů z destinace $i \in I \cup \{0\}$ do destinace $j \in I$. Případů, kdy proměnná $x_{i,j}$ nabude hodnoty 1 je podstatně méně a jsou již uvedeny ve výstupu z algoritmu, na obrázku č. 7.1.

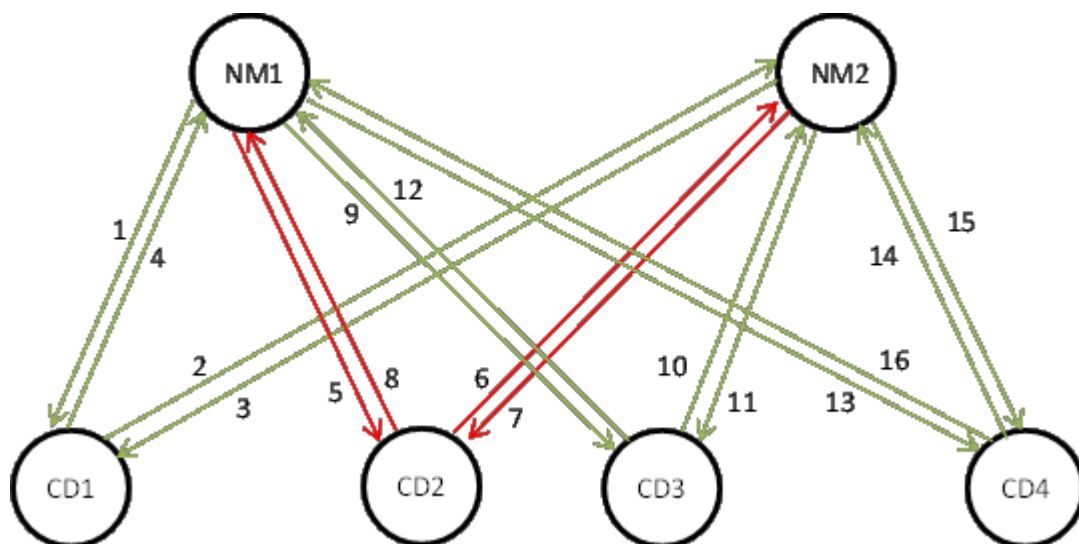
7.2 Interpretace výsledků testu varianty II

V následujícím textu budou vyhodnoceny výsledky testu varianty II. Výstup z modelu řešeného v programu Xpress-IVE je zobrazen na obrázku č. 7.4.



Obr. č. 7.4 Hodnota účelové funkce a návaznost spojů při testu varianty II [16]

Po skončení optimalizačního výpočtu činila hodnota účelové funkce – celkové náklady na obsluhu naplánované množiny spojů $3,99859 \cdot 10^6$ pj. Dále jsou zde vypsány hodnoty proměnných $x_{i,j}$ reprezentujících pouze naplánované přesuny. Ve výpisu se dvakrát vyskytuje proměnná ve tvaru $x_{0,j}$. To znamená, že k obsluze naplánované množiny spojů bylo skutečně použito více letadel (konkrétně 2) tak, jak bylo v zadání testu požadováno (výraz $\sum_{j \in I} x_{0,j}$ reprezentuje počet nasazených letadel).



Obr. č. 7.5 Rozdělení obsluhy spojů při testu varianty II

Na obrázku č. 7.5 jsou červenou barvou znázorněny spoje, které obsloužilo první letadlo. Letadlo tyto spoje obsloužilo v pořadí 1 – 2 – 3 – 4 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16. Spojе obsloužené druhým letadlem jsou znázorněny zelenou barvou. Obslouženy byly v pořadí 5 – 6 – 7 – 8. Z obrázku je vidět, že každá cílová destinace byla obsloužena systémem W, jak bylo původně zamýšleno. Stavové hlášení, viz obrázek č. 7.6, potvrdilo optimalitu získaného řešení (červená elipsa).

Stats			
Matrix:		Presolved:	
Rows(constraints):	304	Rows(constraints):	165
Columns(variables):	306	Columns(variables):	185
Nonzero elements:	1584	Nonzero elements:	721
Global entities:	272	Global entities:	169
Sets:	0	Sets:	0
Set members:	0	Set members:	0
Overall status: Finished global search.			
LP relaxation:		Global search:	
Algorithm:	Simplex dual	Current node:	5657
Simplex iterations:	66	Depth:	22
Objective:	3.96859e+006	Active nodes:	0
Status:	Unfinished	Best bound:	3.99847e+006
Time:	0.0s	Best solution:	3.99859e+006
		Gap:	0.0028798%
		Status:	Solution is optimal
		Time:	3.7s

Obr. č. 7.6 Statistické údaje o výpočtu při testu varianty II [16]

Z obrázku č. 7.6 lze také vyčíst, že program zadanou úlohu řešil 3,7 sekund. Hodnota výpočetního času je zvýrazněna zelenou elipsou.

V záložce Solution, viz obrázek č. 7.7, jsou vypsané všechny proměnné, které byly v algoritmu použity a jejich výsledné hodnoty.

Column	Name	Obj=3.99859...
0	t1(0)	0
1	t1(1)	60
2	t1(2)	240
3	t1(3)	410
4	t1(4)	580
5	t1(5)	1440
6	t1(6)	1770
7	t1(7)	2080
8	t1(8)	2390
9	t1(9)	1440
10	t1(10)	1650
11	t1(11)	1860
12	t1(12)	2880
13	t1(13)	3090
14	t1(14)	3330
15	t1(15)	3560
16	t1(16)	3790

Obr. č. 7.7 Časy odletů spojů při testu varianty II [16]

Jelikož je v modelu použito 306 proměnných, byl jejich výpis velmi dlouhý. Celkového výpisu, ale není třeba. Na obrázku č. 7.7 jsou zobrazeny všechny proměnné t_i^1 (v jazyce mosel t1(i)). Ke každé proměnné je přidělen výsledný čas odletu spoje $i \in I$.

Proměnná t_i^3 , modelující dobu strávenou na letišti po absolvování spoje $i \in I$, je ve všech případech rovna hodnotě 60 (viz. obrázek č. 7.8)

Column	Name	Obj=3.99859...
17	t3(0)	60
18	t3(1)	60
19	t3(2)	60
20	t3(3)	60
21	t3(4)	60
22	t3(5)	60
23	t3(6)	60
24	t3(7)	60
25	t3(8)	60
26	t3(9)	60
27	t3(10)	60
28	t3(11)	60
29	t3(12)	60
30	t3(13)	60
31	t3(14)	60
32	t3(15)	60
33	t3(16)	60

Obr. č. 7.8 Doby strávené na letištích v cílových destinacích při testu varianty II [16]

Nakonec jsou v položce Solutions vypsány všechny proměnné $x_{i,j}$, modelující návaznost jednotlivých spojů. Řešitele zajímají pouze ty proměnné, které nabyly po skončení optimalizačního výpočtu hodnoty 1 a ty již byly vypsány ve výstupu z modelu v obrázku č. 7.4.

8 Závěr

Cílem diplomové práce bylo vytvořit alternativní nástroj pro tvorbu letového řádu letecké charterové společnosti na bázi lineárního programování. V úvodních kapitolách se podařilo zmapovat aktuální stav poznání v dané oblasti, způsoby a omezení týkající se tvorby letových řádů u současných leteckých společností. Bylo zjištěno, že ve světové literatuře existuje celá řada aplikací optimalizačních metod řešících běžné procesní problémy letecké dopravy.

V závislosti na dostupných řešitelských znalostech a informacích o tvorbě letových řádů, byly vytvořeny dva matematické modely, z nichž první uvažuje obsluhu destinací (destinace reprezentuje dvojici letů tam a zpět) a druhý dekomponuje danou dvojici spojů na dva dílčí lety. Navrhovaná dekompozice je vhodná především v situacích, ve kterých je uplatňován systém obsluhy letišť typu W. Modely jsou koncipovány tak, aby všechny destinace (varianta I) nebo spoje (varianta II) byly obslouženy v definovaných časových intervalech. Optimalizačním kritériem jsou v obou případech celkové náklady na obsluhu naplánované množiny destinací/spojů.

V práci jsou detailně popsány všechny části obou modelů, včetně postupu jejich transformace do programovacího jazyku MOSEL. Navržené modely byly následně podrobeny testu funkčnosti v optimalizačním software Xpress-IVE.

Při použití matematického programování následuje po otestování funkčnosti navržených modelů zpravidla fáze, ve které se zkoumá chování modelu při řešení rozsáhlejších úloh a při změnách parametrů, které jsou v modelu použity (v případě navržených modelů je parametrem prohibitivní konstanta). Za tím účelem byly realizovány experimenty, ve kterých byl měněn řád prohibitivní konstanty, a byla monitorována doba optimalizačního výpočtu. Výsledky testů prokázaly očekávaný předpoklad a to, že se změnou hodnoty prohibitivní konstanty dochází také ke změně hodnoty výpočetního času. Nejprve se s rostoucí hodnotou T výpočetní čas snižoval, mezi hodnotami $T = 10^5$ a hodnotu $T = 10^{17}$ zůstával takřka konstantní. Zajímavým zjištěním bylo, že za hodnotou $T = 10^{17}$ program Xpress-IVE již není schopen vytvářet přípustná řešení (testování bylo ukončeno při $T = 10^{22}$). Z výsledků testů také vyplývá, že změna hodnoty prohibitivní konstanty T měla rovněž vliv i na uspořádání naplánovaných spojů (všechna z nich však měla stejnou hodnotu účelové funkce).

Pro budoucí je žádoucí dosavadní modely rozšiřovat o další parametry zohledňující reálný provoz a dále zvyšovat rozsahy modelů a zkoumat jejich řešitelnost a efektivitu optimalizačních výpočtů.

Poděkování

Poděkován zasluhuje především pan Ing. Dušan Teichmann, Ph.D., za svou trpělivost a obětavý přístup při řešení problémů spojených s tvorbou diplomové práce.

Poděkování směřuje také panu Ing. Janu Jurečkovi, za jeho pomoc při získávání potřebných informací.

Použitá literatura

- [1] MERCIER, A., CORDEAU, J-F., SOUMIS, F. A computational study of Benders decomposition for the integrated aircraft routing and crew scheduling problem. *Computers & Operations Research*, 32. [online]. 2005, 1451 – 1476. ISSN 0305-0548.
- [2] EL MOUDANI, W., MORA – CAMINO, F. A dynamic approach for aircraft assignment and maintenance scheduling by airlines. *Journal of Air Transport Managment*, 6. [online]. 2000, 233 – 237. ISSN 0969-6997.
- [3] BURKE, E.K., DE CAUSMAECKER, P., DE MAERE, G., MULDER, J., PAELINCK, M., VANDEN BERGHE, G. A multi-objective approach for robust airline scheduling. *Computers & Operations Research*, 37. [online]. 2010, 822 – 832. ISSN 0305-0548.
- [4] LEE, L.H., LEE, CH.U., TAN, Y.P. A multi-objective genetic algorithm for robust flight scheduling using simulation. *European Journal of Operational Research* 177. [online]. 2007, 1948 – 1968. ISSN 0377-2217.
- [5] YAN, S., TANG, CH – H., FU, T – CH. An airline scheduling model and solution algorithms under stochastic demands. *European Journal of Operational Research* 190. [online]. 2008, 22 – 39. ISSN 0377-2217.
- [6] MERCIER, A., SOUMIS, F. An integrated aircraft routing, crew scheduling and flight retiming model. *Computers & Operations Research* 34. [online]. 2007, 2251 – 2265. ISSN 0305-0548.
- [7] STOJKOVIĆ, G., SOUMIS, F., DESROSIERS, J., SOLOMON, M.M. An optimization model for a real-time flight scheduling problem. *Transportation Research Part A* 36. [online]. 2002, 779 – 788. ISSN 0965-8564.
- [8] SRIRAM, CH., HAGHANI, A. An optimization model for aircraft maintenance scheduling and re-assignment. *Transportation Research Part A* 37. [online]. 2003, 29 – 48. ISSN 0965-8564.
- [9] TEICHMANN, D. Studijní opory k modulu M14 - Optimalizace technologických procesů. [online]. ©2012 [19-4-2014]. <http://www.vvvd.cz/m14-optimalizace-technologickyh-procesu-29.html>
- [10] JANÁČEK, J. Matematické programování. EDIS, ŽU – Žilina, 1999, 225 s.
- [11] PRUŠA, J a kol. Svět letecké dopravy. Vyd. 1. Praha: Galileo CEE Service ČR, 2007, 315 s. ISBN 978-80-239-9206-9.
- [12] KROUŽIL, K. Časová koordinace osobní železniční dopravy v přestupních stanicích na trati Ostrava-Svinov – Český Těšín. VŠB-TU OSTRAVA, Ostrava, 2010, 65 s.
- [13] JANÁČEK, J., JANÁČKOVÁ, M., SZENDREYOVÁ, A., GÁBRIŠOVÁ, L., KOHÁNI, M., JÁNOŠÍKOVÁ, L.: Navrhovanie územne rozľahlých obslužných systémov. Žilina: ŽU v Žilině. 2010. ISBN 978-80-554-0219-2.
- [14] ŠILHÁNEK, J., HOMOLKA, T. Síťové diagramy, Ganttovy diagramy. [online]. Brno, 2005. http://jurajj.wz.cz/SitoveDiagramy_GanttovyDiagramy_PERT.pdf
- [15] GANTTPROJECT. [online]. ©2013-1014 [27-4-2014]. <http://www.ganttproject.biz/>
- [16] FAIR ISAAC CORPORATIN. [online]. ©2014 [20-2-2014]. <http://www.fico.com/en/products/fico-xpress-optimization-suite/>

Seznam obrázků

- Obr. č. 2.1 Sít'ový graf, s. 8
- Obr. č. 2.2 Tvorba Ganttova diagramu v programu Gantt Project [15], s. 9
- Obr. č. 4.1 Obsluha cílové destinace skládající se z 1 oběhu, s. 20
- Obr. č. 4.2 Průběh oběhu na časové ose, s. 21
- Obr. č. 4.3 Systém obsluhy W, s. 26
- Obr. č. 5.1 Pracovní prostředí software Xpress-IVE [16], s. 31
- Obr. č. 5.2 Okno pro zadávání textu programu v software Xpress-IVE [16], s. 32
- Obr. č. 5.3 Informační okno s výslednými daty v software Xpress-IVE [16], s. 33
- Obr. č. 6.1 Obsluha systémem W, s. 40
- Obr. č. 6.2 Matice nákladů na přesuny mezi spoji [16], s. 46
- Obr. č. 6.3 Hodnota účelové funkce a návaznost spojů při $T = 10^{18}$ [16], s. 50
- Obr. č. 6.4 Časy odletů spojů při $T = 10^{18}$ [16], s. 50
- Obr. č. 6.5 Statistické údaje o výpočtu při $T = 10^{18}$ [16], s. 51
- Obr. č. 6.6 Graf závislosti prohibitivní konstanty T na hodnotě výpočetního času, s. 51
- Obr. č. 6.7 Statistické údaje o výpočtu při $T = 10^4$ [16], s. 52
- Obr. č. 6.8 Rozdělení obsluhy spojů při $T = 10^4$, s. 52
- Obr. č. 6.9 Hodnota účelové funkce a návaznost spojů při $T = 10^5$ až $T = 10^{16}$ [16], s. 53
- Obr. č. 6.10 Rozdělení obsluhy spojů při $T = 10^5$ až $T = 10^{16}$, s. 53
- Obr. č. 6.11 Hodnota účelové funkce a návaznost spojů při $T = 10^{17}$ [16], s. 54
- Obr. č. 6.12 Rozdělení obsluhy spojů při $T = 10^{17}$, s. 54
- Obr. č. 7.1 Hodnota účelové funkce a návaznost letů při testu varianty I [16], s. 55
- Obr. č. 7.2 Statistické údaje o výpočtu při testu varianty I [16], s. 56
- Obr. č. 7.3 Výsledné hodnoty proměnných t_j^0, t_i^1, t_i^3 při testu varianty I [16], s. 56
- Obr. č. 7.4 Hodnota účelové funkce a návaznost spojů při testu varianty II [16], s. 57
- Obr. č. 7.5 Rozdělení obsluhy spojů při testu varianty II, s. 58

Obr. č. 7.6 Statistické údaje o výpočtu při testu varianty II [16], s. 58

Obr. č. 7.7 Časy odletů spojů při testu varianty II [16], s. 59

Obr. č. 7.8 Doby strávené na letištích v cílových destinacích při testu varianty II [16], s. 59

Seznam tabulek

Tab. č. 6.1	Vstupní data – náklady na handling, s. 36
Tab. č. 6.2	Vstupní data – náklady na přeletové poplatky při letu do cílové destinace, s. 36
Tab. č. 6.3	Vstupní data – náklady na přeletové poplatky při letu na domovské letiště, s.36
Tab. č. 6.4	Vstupní data – cena za 1 litr paliva v cílové destinaci, s. 37
Tab. č. 6.5	Vstupní data – doby trvání letů do cílových destinací, s. 37
Tab. č. 6.6	Vstupní data – doby trvání letů zpět na domovské letiště, s. 37
Tab. č. 6.7	Vstupní data – intervaly letů do cílových destinací, s. 37
Tab. č. 6.8	Vstupní data – fixní náklady, s. 38
Tab. č. 6.9	Vstupní data – náklady na handling, s. 40
Tab. č. 6.10	Vstupní data – přeletové poplatky, s. 41
Tab. č. 6.11	Vstupní data – cena 1 litru paliva, s. 41
Tab. č. 6.12	Vstupní data – intervaly letů do cílových destinací I, s. 41
Tab. č. 6.13	Vstupní data – intervaly letů do cílových destinací II, s. 41
Tab. č. 6.14	Vstupní data – doby trvání letů I, s. 42
Tab. č. 6.15	Vstupní data – doby trvání letů II, s. 42
Tab. č. 6.16	Vstupní data – náklady na přesuny mezi spoji, s. 42
Tab. č. 6.17	Vstupní data – fixní náklady, s. 43
Tab. č. 6.18	Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^4$, s. 47
Tab. č. 6.19	Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^5$, s. 47
Tab. č. 6.20	Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^6$, s. 47
Tab. č. 6.21	Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^7$, s. 47
Tab. č. 6.22	Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^8$, s. 48
Tab. č. 6.23	Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^9$, s. 48
Tab. č. 6.24	Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{10}$, s. 48
Tab. č. 6.25	Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{11}$, s. 48

- Tab. č. 6.26 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{12}$, s. 48
- Tab. č. 6.27 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{13}$, s. 48
- Tab. č. 6.28 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{14}$, s. 49
- Tab. č. 6.29 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{15}$, s. 49
- Tab. č. 6.30 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{16}$, s. 49
- Tab. č. 6.31 Výstupní data – test výpočetního času při $T = 10^{17}$, s. 49